Exercices pour le chapitre 1 : Algèbre linéaire et tenseurs

Version 9 septembre 2018

1 Exercices de niveau I

NIVEAU I Questions simples

1) Écrire $\underline{u}\cdot\underline{v}$, $\underline{v}=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{u}$, $\underline{u}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\underline{v}$ et $\underline{\underline{B}}=\underline{u}\otimes\underline{v}$ en notations indicées en utilisant la convention de sommation d'Einstein.

$\underline{u}\cdot\underline{v}=u_i\,v_i$, $v_i=A_{ij}\,u_j$, $\underline{u}\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\underline{v}=u_i\,C_{ij}v_j$ et $B_{ij}=u_i\,v_j$.

2) Écrire $\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}}$, $\underline{w}=\underline{u}\wedge\underline{v}$ et $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ en notations indicées en utilisant la convention de sommation d'Einstein.

$C_{ij}=A_{il}\,B_{lj}$, $\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}}=A_{ij}\,B_{ji}$, $w_i=\epsilon_{ijk}\,u_j\,v_k$ et $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})=\epsilon_{ijk}u_i\,v_j\,w_k$.

3) Calculer le produit mixte $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$. On considère $\underline{\underline{K}}=2\,\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1+2\,\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2+\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$. Calculer les parties symétrique $\underline{\underline{D}}$ et antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ de $\underline{\underline{K}}$. On considère $\underline{\underline{\sigma}}=2\,\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1+\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2+\underline{e}_2\otimes\underline{e}_1+\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$. Calculer les parties sphérique $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}$ et déviatorique $\underline{\underline{\sigma}}^{(d)}$.

On a $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)=1$. On a $\underline{\underline{D}}=2\,\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1+\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2+\underline{e}_2\otimes\underline{e}_1+\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$ et $\underline{\underline{\Omega}}=\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2-\underline{e}_2\otimes\underline{e}_1$. On a $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}=\underline{\underline{I}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(d)}=\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1-\underline{e}_2\otimes\underline{e}_2+\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2+\underline{e}_2\otimes\underline{e}_1$.

4) Calculer $\underline{\mathrm{grad}}\;B$, $\mathrm{div}\;\underline{V}$, ΔB et $\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{V}$ pour $B(\underline{x})=\underline{x}^2$ et $\underline{V}=\underline{\mathrm{grad}}\;B$.

$\underline{\mathrm{grad}}\;B=2\,\underline{x}$, $\mathrm{div}\;\underline{V}=\Delta B=6$ et $\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{V}=\underline{0}$.

5) Calculer $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;\underline{V}$, $\underline{U}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\;\underline{V}$, $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;V\cdot\underline{U}$, $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{A}}$ et ΔV pour $\underline{V}=2\,\underline{x}$, $\underline{U}=\underline{x}$ et $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;\underline{V}$.

$\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;\underline{V}=2\,\underline{\underline{I}}$, $\underline{U}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\;\underline{V}=\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;V\cdot\underline{U}=2\,\underline{x}$ et $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{A}}=\Delta V=\underline{0}$.

6) Calculer $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{A}}$ pour $\underline{\underline{A}}=\underline{x}\otimes\underline{e}_1$ puis $\underline{\underline{A}}=\underline{e}_1\otimes\underline{x}$.

$\underline{\mathrm{div}}\,(\underline{x}\otimes\underline{e}_1)=\underline{e}_1$ et $\underline{\mathrm{div}}\,(\underline{e}_1\otimes\underline{x})=3\,\underline{e}_1$.

7) Calculer $\mathrm{div}\;(B\,\underline{V})$, $\mathrm{div}\;(\underline{U}\otimes\underline{V})$ et $\underline{\mathrm{rot}}\;(\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{V})$ pour $B=\underline{x}^2$, $\underline{U}=\underline{x}$ et $\underline{V}=2\,\underline{x}$.

$\mathrm{div}\;(B\,\underline{V})=10\,\underline{x}^2$, $\mathrm{div}\;(\underline{U}\otimes\underline{V})=8\,\underline{x}$ et $\underline{\mathrm{rot}}\;(\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{V})=\underline{0}$.

8) Calculer $\iint_{\partial\mathcal{D}}\underline{Q}\cdot\underline{n}\,dS$ et $\iint_{\partial\mathcal{D}}\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\,dS$ pour $\underline{Q}(\underline{x})=x\,\underline{e}_1+y\,\underline{e}_2-2\,z\,\underline{e}_3$ et

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{e}_1 \otimes \underline{Q}(\underline{x})$.

Comme div $\underline{Q} = 0$ et $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$, le théorème de la divergence entraine que ces intégrales sont nulles.

9) On considère l'équation $\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi}) + \mu\,\Delta\underline{\xi}$ où $\underline{\xi}(a_1, a_2, a_3, t)$ est un champ de vecteurs 3D et où λ et μ sont des constantes positives. On note $d = \mathrm{div}\,\underline{\xi}$ et $\underline{r} = \underline{\mathrm{rot}}\,\xi$. Montrer que $\frac{d^2 d}{dt^2} = c_1^2\,\Delta d$ et $\frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = c_2^2\,\Delta \underline{r}$ où c_1 et c_2 sont des constantes que l'on déterminera.

Comme les dérivations en temps (t) et en espace $(\underline{a})$ commutent, comme div $\underline{\mathrm{grad}} = \Delta$ et comme $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{\mathrm{grad}} = \underline{0}$, les champs $d(\underline{a}, t)$ et $\underline{r}(\underline{a}, t)$ vérifient bien l'équation des ondes avec $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho_0}}$ et $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$.

2 Exercices de niveau II

NIVEAU II Révision sur les tenseurs (A)

1) Démontrer que $\underline{u} \otimes \underline{v} \cdot \underline{w} = (\underline{v} \cdot \underline{w})\ \underline{u}$ et que ses composante sont $v_j\, w_j\, u_i$.

En utilisant la convention d'Einstein, on peut écrire $\underline{u} \otimes \underline{v} \cdot \underline{w} = u_i\, v_j\, w_j\, \underline{e}_i = (\underline{v} \cdot \underline{w})\ \underline{u}$.

2) Relier ce résultat à la relation $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{u} = A_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \cdot \underline{u} = A_{ij}\, u_j\, \underline{e}_i$.

Comme $\underline{\underline{A}} = A_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ et $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \cdot \underline{u} = (\underline{e}_j \cdot \underline{u})\, \underline{e}_i = u_j\, \underline{e}_i$, on a $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{u} = A_{ij}\, u_j\, \underline{e}_i$.

3) On considère la relation linéaire $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\epsilon}})\, \underline{\underline{I}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\epsilon}}$ entre deux tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}$. Projeter cette relation sur l'espace des tenseurs sphériques et l'espace des tenseurs déviatoriques. Montrer que $\underline{\underline{\epsilon}} = a\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{I}} + 2\,b\,\underline{\underline{\sigma}}$, où a et b sont des constantes que l'on déterminera.

La projection de la relation $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\epsilon}})\, \underline{\underline{I}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\epsilon}}$ sur les espaces vectoriels des tenseurs d'ordre deux sphériques et déviatoriques conduit à $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{I}} = \frac{1}{3}\,(3\,\lambda + 2\,\mu)\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\epsilon}})\, \underline{\underline{I}} = (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\underline{\underline{\epsilon}}^{(s)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(d)} = 2\,\mu\,\underline{\underline{\epsilon}}^{(d)}$. On en déduit $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{(s)} + \underline{\underline{\epsilon}}^{(d)} = \frac{1}{3\,\lambda+2\,\mu}\underline{\underline{\sigma}}^{(s)} + \frac{1}{2\,\mu}\underline{\underline{\sigma}}^{(d)} = \frac{1}{3\,\lambda+2\,\mu}\,\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}} + \frac{1}{2\,\mu}[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{I}}$. On a donc bien $\underline{\underline{\epsilon}} = a\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{I}} + 2\,b\,\underline{\underline{\sigma}}$ avec $a = \frac{1}{3}(\frac{1}{3\,\lambda+2\,\mu} - \frac{1}{2\,\mu})$ et $b = \frac{1}{4\,\mu}$. On peut aussi projeter la relation $\underline{\underline{\epsilon}} = a\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{I}} + 2\,b\,\underline{\underline{\sigma}}$ en $\underline{\underline{\epsilon}}^{(s)} = (3\,a + 2\,b)\ \underline{\underline{\sigma}}^{(s)}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^{(d)} = 2\,b\,\underline{\underline{\sigma}}^{(d)}$ pour en déduire $(3\,\lambda + 2\,\mu)(3\,a + 2\,b) = 1$ et $(2\,\mu)(2\,a) = 1$.

4) Montrer que $\iint_{\partial\mathcal{D}} p\ \underline{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\mathrm{grad}}\ p\ d^3x$.

On pose $\underline{\underline{\sigma}} = p\ \underline{\underline{I}}$ et on applique la formule de la divergence $\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}}\ d^3x$ en remarquant que $\underline{\mathrm{div}}\,(p\ \underline{\underline{I}}) = \underline{\mathrm{grad}}\ p$.

5) En utilisant la convention d'Einstein, développer les expressions div $(B\,\underline{V})$, $\underline{\mathrm{div}}\,(\underline{U} \otimes \underline{V})$.

On a div $(B\,\underline{V}) = \frac{\partial(B\,V_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial B}{\partial x_j}\,V_j + B\,\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \underline{\mathrm{grad}}\ B \cdot \underline{V} + B\,\mathrm{div}\ \underline{V}$. La seconde expression s'écrit $\underline{\mathrm{div}}\,(\underline{U} \otimes \underline{V}) = \frac{\partial(U_i\,V_j)}{\partial x_j}\ \underline{e}_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\,V_j\,\underline{e}_i + U_i\,\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\,\underline{e}_i = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{U} \cdot \underline{V} + \mathrm{div}\ V\ \underline{U}$.

3 Exercices de niveau III

NIVEAU III Révision sur les tenseurs (B)

1) On considère $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}$ et sa décomposition $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}}$ en partie antisymétrique et symétrique. On pose $\underline{\underline{\tau}} = \lambda_n \operatorname{tr}(\underline{\underline{D}})\ \underline{\underline{I}} + 2\ \mu_n\ \underline{\underline{D}}$. Montrer que $\underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\tau}} = (\lambda_n + \mu_n)\ \underline{\text{grad}}\ (\text{div}\ \underline{U}) + \mu_n\ \Delta \underline{U}$.
2) Ecrire la formule de la divergence $\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q} \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\ \underline{Q}\, dx^3$ avec la convention d'Einstein. Exprimer les composantes du vecteur $\underline{C} = \underline{A} - \underline{B}$ avec $\underline{A} = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}\, dS$ et $\underline{B} = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\ d^3x$. En déduire que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique lorsque $\underline{C} = \underline{0}$ pour tout domaine $\mathcal{D}$.
3) On considère un champ de tenseurs d'ordre deux symétrique $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ et un champ de vecteurs $\underline{U}(\underline{x})$. On note $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}$ et $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}}$ sa décomposition en partie antisymétrique et symétrique. On note $A = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{U} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\, dS$, $B = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U}\ d^3x$ et $C = A - B$. Montrer que $C = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}\ d^3x$.