EXERCICE 1.2 Pluie et ondes de crue

On considère une portion de rivière de longueur L drainant un bassin versant soumis à une pluie uniforme représentée par une fonction $P(t)$. On suppose que la hauteur d'eau $h(x,t)$ de la rivière est régie par le modèle

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_0 \frac{\partial h}{\partial x} = P \tag{1}$$

où U_0 est une constante positive. On suppose que la hauteur d'eau en amont est constante et donnée par la condition aux limites $h(0,t) = h_0$. On s'intéresse alors à la hauteur d'eau $h_e(t) = h(L,t)$ en aval de la portion de rivière en fonction du régime de pluie $P(t)$.

1) Calculer et tracer la solution stationnaire $h(x,t) = h_s(x)$ obtenue pour une pluie constante $P(t) = P_0$. On pourra noter $\gamma = P_0/U_0$.
2) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le profil de hauteur d'eau est la solution stationnaire $h(x,0) = h_s(x)$ pour $x \in [0,L]$. On suppose que l'intensité de pluie est nulle pour $t \geq 0$. Monter que $h_e(t) = h_0$ pour $t \geq T$ avec $T = L/U_0$.
3) Tracer dans le plan (x,t) le lieu des points pour lesquels l'écoulement est uniforme.
4) Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $h_e(t)$ en fonction du temps.
5) Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $h(x,t)$.
6) On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t = 0$ la hauteur d'eau est uniforme et égale à $h(x,t) = h_0$ pour $x \in [0,L]$. On suppose une intensité de pluie constante $P(t) = P_0$ pour $t \geq 0$. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $h_e(t)$ en fonction du temps.
7) Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $h(x,t)$.

Corrigé page 2

Corrigé 1.2 Pluie et ondes de crue

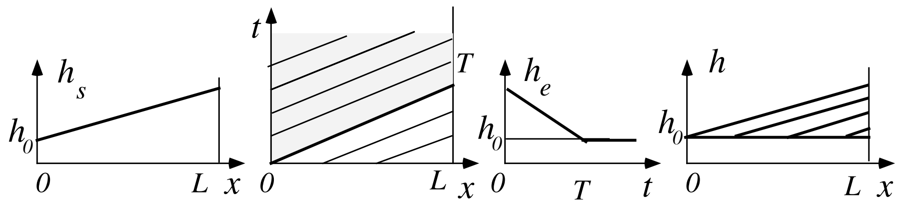

FIGURE 1 – *Vidange de la rivière a) $h_s(x)$, b) Région uniforme et droites caractéristiques, c) $h_e(t)$, d) $h(x,t)$.*

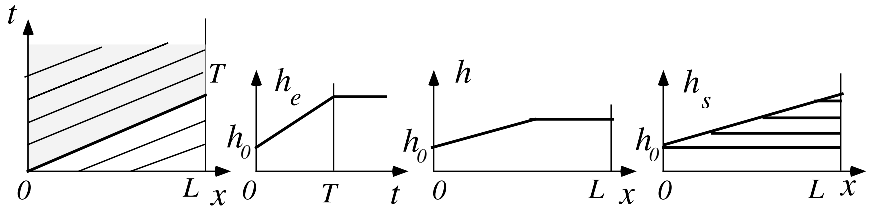

FIGURE 2 – *Remplissage de la rivière a) droites caractéristiques, b) $h_e(t)$, c) $h(x,t)$, d) $h_s(x)$ et $h(x,t)$.*

1)La solution de l'équation $U_0\, h_s'(x) = P_0$ avec la condition $h_s(0) = h_0$ est $h_s(x) = h_0 + \gamma\, x$ avec $\gamma = P_0/U_0$. Le profil $h_s(x)$ est linéaire. **2)**Les caractéristiques de ce modèle sont des droites d'équation $x = a + U_0\, t$ si a désigne l'abscisse de l'intersection avec l'intervalle $[0, L]$ de l'axe des x ou $x = U_0\,(t - \tau)$ si τ désigne l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des t. Les droites caractéristiques issues du demi-axe des temps $t \geq 0$ coupent la droite $x = L$ à partir du temps $T = L/U_0$. Comme h est un invariant de Riemann le long des caractéristiques et que $h(0,t) = h_0$ pour $t \geq 0$ on a $h(L,t) = h_0$ pour $t \geq T$. **3)**La région $t \geq 0$ délimitée par la droite caractéristique $x = U_0\, t$ est uniforme avec $h(x,t) = h_0$. **4)**Pour $t \leq T$, la caractéristique passant par le point (L,t) du plan (x,t) coupe l'axe des x en $a = L - U_0\, t$. La condition initiale est égale à $h_s(a) = h_0 + \gamma\, a$ en ce point. On a donc $h_e(t) = h(x,t) = h_0 + \gamma\, L - \gamma\, U_0\, t = h_0 + \gamma\, L - P_0\, t$ pour $t \in [0,T]$. La hauteur $h_e(t)$ décroît linéairement à partir de la valeur $h_s(L)$ pour stagner à la valeur h_0 au-delà de $t = T$. **5)**Pour $x \leq U_0\, t$, on a vu que $h(x,t) = h_0$. Pour $x \geq U_0\, t$, la droite caractéristique passant par (x,t) coupe l'axe des x en $a = x - U_0\, t$, ce qui entraîne $h(x,t) = h_0 + \gamma\, x - P_0\, t$. La solution $h(x,t)$ est égale à $h_s(x - U_0\, t)$ pour $x \geq U_0\, t$ et égale à h_0 sinon. **6)**Les droites caractéristiques sont les mêmes que pour le cas $P = 0$, mais h n'est plus qu'une fonction de Riemann vérifiant $\left(\frac{dh}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = P_0$. Pour $t \leq T$, l'intégration de la fonction de Riemann le long de la droite caractéristique passant par (L,t) conduit à $h_e(t) = h(L,t) = h_0 + P_0\, t$. Pour $t \geq T$, la droite caractéristique coupe l'axe des t en $(0, t - L/U_0)$ et l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h_e(t) = h(L,t) = h_0 + P_0\, L/U_0 = h_0 + \gamma\, L$. Le profil $h_e(t)$ croît linéairement de h_0 à $h_0 + \gamma\, L = h_0 + P_0\, T$ sur l'intervalle $[0,T]$ puis reste constant. **7)**Pour $x \geq U_0\, t$, l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h(x,t) = h_0 + P_0\, t$. Pour $x \leq U_0\, t$, la droite caractéristique passant pas (x,t) coupe l'axe des t en $(0, t - x/U_0)$. L'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h(x,t) = h_0 + P_0\, x/U_0 = h_0 + \gamma\, x$. La solution $h(x,t)$ part de h_0, croît linéairement avec le temps jusqu'à atteindre la valeur du profil stationnaire $h_s(t)$. Le point où cette valeur est atteinte se déplace à la vitesse U_0.