EXERCICE 1.1 Onde de crue de faible amplitude

On considère le modèle suivant pour une onde de crue de faible amplitude :

$$\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \frac{3}{2}\, U(x)\, \frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad U(x) = \frac{U_0}{1 + \lambda\, x} \tag{1}$$

où $\widetilde{h}(x,t)$ est la perturbation d'un profil d'équilibre de hauteur d'eau que l'on suppose associé au profil de vitesse $U(x)$ avec $U_0 > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que le domaine étudié est la demi-droite $x \geq 0$.

1) Donner l'expression des courbes caractéristiques de cette équation. Tracer ces courbes dans le quart de plan (x,t) avec $x \geq 0$ et $t \geq 0$.
2) Montrer que la distance $L(t) = x_2(t) - x_1(t)$ entre deux trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ décrivant deux courbes caractéristiques tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

On considère la condition aux limites $\widetilde{h}(0,t) = \widetilde{h}_*$ pour $t \geq 0$.

3) Indiquer la région du quart de plan (x,t) pour laquelle la solution peut être déterminée par la donnée de cette condition aux limites et tracer la partie connue du profil de crue $h(x,t)$ à des instants successifs.

On considère la condition initiale $\widetilde{h}(x,0) = \widetilde{h}_*\, [1 - \tanh(x/L_0)]$ pour $x \geq 0$ avec $\widetilde{h}_* \geq 0$ et $L_0 > 0$.

4) Montrer que l'on peut à présent déterminer la solution sur tout le quart de plan (x,t) et tracer schématiquement le profil de crue $h(x,t)$ à des instants successifs.

Corrigé page 1

Corrigé 1.1 Onde de crue de faible amplitude

1)Les courbes caractéristiques sont définies par $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}U(x) = \frac{3}{2}U_0/(1+\lambda\, x)$ ce qui s'intègre en $\left(1 + \frac{\lambda}{2}x\right) x - \frac{3}{2}U_0\, t = C$ où C est une constante arbitraire. Dans le plan (x,t), ces courbes forment la famille des paraboles $t = \alpha\, x_1^2 + \beta\, x + C$ avec $\alpha = \frac{\lambda}{3U_0}$, $\beta = \frac{2}{3U_0}$ et C quelconque. **2)**Les équations des deux trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrivent respectivement $t = \alpha\, x_1^2 + \beta\, x_1 + C_1$ et $t = \alpha\, x_2^2 + \beta\, x_2 + C_2$. On en déduit $\alpha\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \beta\,(x_2 - x_1) = C_2 - C_1$ et donc $L(t) = x_2(t) - x_1(t) = \frac{C_1 - C_2}{\alpha[x_2(t)+x_1(t)]+\beta}$. Comme $x_1(t)$ et $x_2(t)$ tendent vers l'infini lorsque t tend vers l'infini, on voit que $L(t)$ tend vers zéro.

3)Le domaine d'influence issu de la demi-droite Ot est située à gauche de la courbe caractéristique $x_0(t)$ issue du point $(0,0)$, c'est-à-dire la parabole d'équation $t = \alpha\, x^2 + \beta\, x$. On a $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_*$ pour $t \geq 0$ et $0 \leq 0 \leq x_0(t)$. **4)**Étant donné un point (x,t) situé à

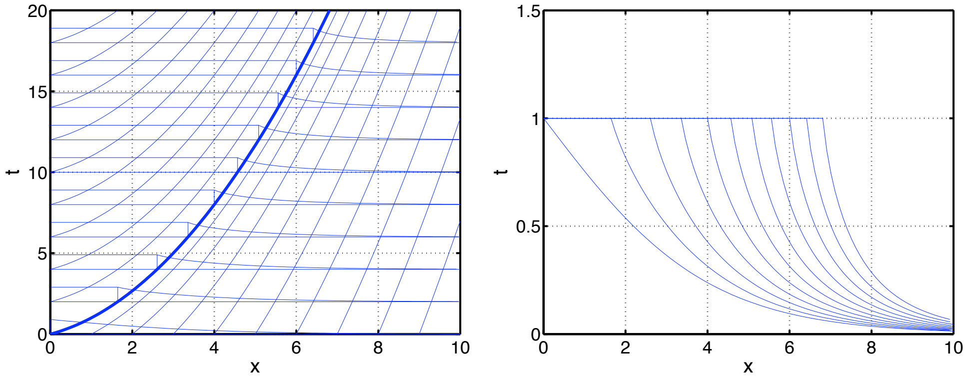

FIGURE 1 – a) Courbes caractéristiques et profils $\widetilde{h}(x,t)$. b) Profils seuls.

droite de la courbe $x_0(t)$, l'équation $t = \alpha x^2 + \beta x - (\alpha a^2 + \beta a)$ est celle de la courbe caractéristique qui passe par le point $(a,0)$ de la demi-droite Ox avec $a = A(x,t) = \frac{\beta}{2\alpha}\left[-1+\sqrt{1+\frac{4\alpha^2}{\beta^2}x^2+\frac{4\alpha}{\beta}x-\frac{4\alpha t}{\beta^2}}\right]$. La solution dans le domaine d'influence de la condition initiale s'écrit alors $h(x,t) = h_i[A(x,t)] = \widetilde{h}_*\left\{1-\tanh\left[A(x,t)/L_0\right]\right\}$. Par un raisonnement géométrique en suivant les courbes caractéristiques (ou par une étude de du sens de variation des fonctions), on voit que le profil $\widetilde{h}(x,t)$ décroît entre $x_0(t)$ et l'infini de la valeur $\widetilde{h}_0$ à la valeur zéro. Ce profil est advecté vers l'aval, les valeurs de $\widetilde{h}$ restant constantes le long des courbes caractéristiques. Son échelle de longeur caractéristique tend vers zéro.