EXERCICE 1.5 Ondes de crues non linéaires

On considère l'écoulement d'une lame d'eau d'épaisseur $h(x,t)$ et de vitesse moyenne $U(x,t)$ sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

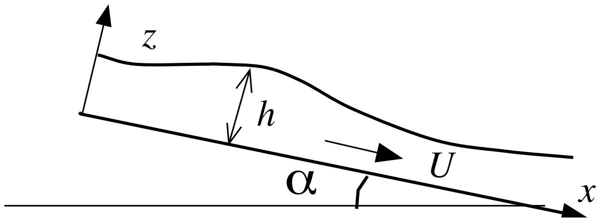

FIGURE 1 – *Écoulement d'une lame d'eau de hauteur h et de vitesse U sur un pan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.*

On suppose que cet écoulement à surface libre est régi par le modèle suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\,(U\,h)}{\partial x} = 0, \qquad 0 = g\sin\alpha - \frac{C_f}{2}\frac{U|U|}{h} \tag{1}$$

où g est la gravité et C_f est un coefficient de frottement constant. On suppose que la vitesse moyenne $U(x,t)$ reste toujours positive.

1) Quelles lois de conservation décrivent les équations du modèle et quelles approximations ont été utilisées.
2) Montrer que l'on peut éliminer U pour ne conserver qu'une équation en h que l'on écrira.
3) En invoquant les lois de conservation de la mécanique dont découlent le modèle, montrer que la formulation intégrale de la loi de conservation de la grandeur $\int_a^b h(x,t)dx$ s'écrit
$$\frac{d}{dt}\int_a^b h(x,t)dx + \kappa\, h^{\frac{3}{2}}(b,t) - \kappa\, h^{\frac{3}{2}}(a,t) = 0 \tag{2}$$
pour tout intervalle fixe $[a,b]$ pris sur l'axe des x.
4) Montrer que l'on peut d'éduire l'équation aux dérivée partielle de la question précédent à partir de cette formulation intégrale. La réciproque est-elle vraie ? Quelle équation manque-t-il pour remonter à la formulation intégrale ?

On suppose que $\kappa = 1$ m$^{\frac{1}{2}}$ s^{-1} et on considère la condition initiale $h(x,0) = h_0 + \frac{1}{2}\Delta h\,[1 - \tanh(k\,x)]$ avec $h_0 = 1$ m, $\Delta h = 1.25$ m et $k = 10^{-1}$ km^{-1}.

5) Écrire les équations des courbes caractéristiques. Tracer sommairement ces courbes dans le demi-plan plan (x,t) avec $t \geq 0$.
6) Donner l'expression de l'invariant de Riemman et tracer sommairement les profils de cette grosse crue à différents instants représentatifs de son évolution. Indiquer

comment varie l'extension spatiale du profil de crue.

7) Calculer la valeur numérique de la vitesse de propagation du ressaut longtemps après sa formation lorsque sa hauteur est proche de Δh.
8) Commenter la pertinence de ce modèle pour décrire certains phénomènes dévastateurs observés dans la nature.

Corrigé page 2

Corrigé 1.5 Ondes de crues non linéaires

1)La première équation traduit la conservation de la masse. La deuxième équation provient de la loi de conservation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe x dans laquelle l'accélération ainsi que le gradient de pression sont négligés. Seul l'équilibre entre la force de gravité et le frottement subistent. **2)**En remplaçant $U = \sqrt{\frac{2\,g\,h\,\sin\alpha}{C_f}} = \kappa\, h^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation de continuité, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa \frac{\partial}{\partial x}\left(h^{\frac{2}{3}}\right) = 0$. **3)**La loi de conservation de la masse sous forme intégrale s'écrit $\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b h\,dx + (hU)|_b - (hU)|_a = 0$. On remplaçant U par son expression en fonction de h on obtient $\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b h\,dx + q(h|_b) - q(h|_a) = 0$ avec $q(h) = \kappa\, h^{\frac{2}{3}}$. **4)**On déduit de la formulation intégrale du modèle l'équation de bilan local $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = q'(k) = \frac{3}{2}\kappa h^{\frac{1}{2}}$ avec $q(h) = \kappa\, h^{\frac{3}{2}}$. La réciproque n'est pas vraie sauf si l'on ajoute la relation de saut $-w[\![h]\!] + [\![q]\!] = 0$. **5)**Les caractéristiques sont des droites d'équation $x = X + c[h(X,0)]\; t$. **6)**Comme $c(h)$ est croissante et $h(x,0)$ décroissante, l'information "hautes eaux" rattrape l'information "basses eaux" : les caractéristiques se coupent et il se forme un ressaut hydraulique. **7)**L'invariant de Riemman est $r(h) = h$. L'extension spatiale du profil (initialement de l'ordre de $1/k$) diminue linéairement avec le temps jusqu'à la formation du ressaut. **8)**La vitesse de propagation du ressaut hydraulique est $w = [\![q]\!]/[\![h]\!]$. Longtemps après la formation du ressaut, la hauteur en amont du ressaut tend vers $h_0 + \Delta h$ et la hauteur en aval ver h_0. La vitesse du ressaut tend donc vers $w = \kappa\left[(h_0+\Delta h)^{3/2} - h_0^{3/2}\right]/\Delta h$. L'application numérique conduit à $w = \frac{(2.25)^{\frac{3}{2}}-1}{1.25} = \frac{(9/4)^{\frac{3}{2}}-1}{(5/4)} = \frac{(27/8-1)}{(5/4)} = 1.9$ m/s. **9)**Une crue d'environ 1 m sur un rivière de 1 m de profondeur coulant à 1 m/s ne semble pas dangeureuse si l'eau monte progressivement. Mais lorsqu'il se forme un ressaut d'environ 1 m se propageant à une vitesse d'environ 2 m/s, les effets dévastateurs peuvent être importants. L'approximation des ondes de crues permet de modéliser simplement ce phénomène.

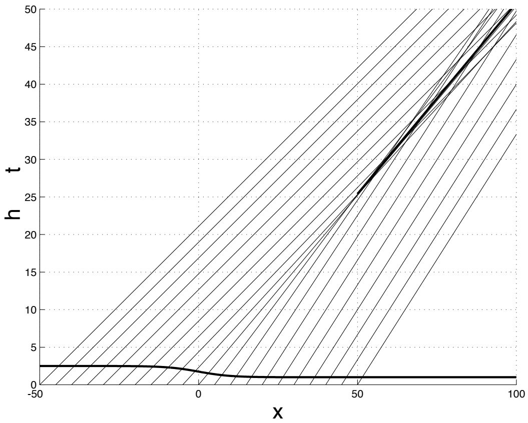

FIGURE 2 – *Droites caractéristiques et ressaut dans le plan (x, t) pour la conditions initiale $h(x, 0)$.*