FORMULAIRE

DÉRIVÉE LE LONG DE COURBES

Dérivée d'un champ le long d'une courbe :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t) = c_{\mathcal{L}}(t) \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_{\mathcal{L}}(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\rho\,[x_{\mathcal{L}}(t), t]$$

Famille de courbes $x_{\mathcal{L}_a}(t) = X(a,t)$ et mouvement 1D :

$$\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{L}_a}(t) = \rho\,[X(a,t), t] \quad \Longleftrightarrow \rho(x,t) = \rho^{(L)}\,[A(x,t), t]$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION D'ADVECTION

Équation d'advection :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t)\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \qquad \text{avec} \quad \rho(x,0) = \rho_0(x)$$

Système dynamique équivalent :

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & = c\,(\rho, x, t) \\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & = f\,(\rho, x, t) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad [x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$$

Changement de variable :

$$\begin{cases} da & = dx - c\;dt \\ d\tau & = dt \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = & A(x,t) \\ \tau & = & t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} & = & \frac{\partial}{\partial a} \\ \frac{\partial}{\partial t} & = & -c\,\frac{\partial}{\partial a} & + \frac{\partial}{\partial \tau}\tau \end{cases}$$

Résumé de la méthode des caractéristiques :

$$\frac{d\rho}{dt} = f(\rho, x, t) \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad \frac{dx}{dt} = c(\rho, x, t)\;.$$

CAS PARTICULIERS DE RÉSOLUTION DE $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = f$

Cas $c = c_0$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f(\rho, a + c_0\, t, t) \quad \text{sur la droite } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad x = a + c_0\, t\ .$$

Cas $c = c(x)$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f[\rho, X(a,t), t] \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad x = X(a,t)$$

$$\text{avec} \quad X(a,t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right] \quad \text{et} \quad \Theta(x) = \int_{x_*}^{x} \frac{1}{c(s)}\, ds$$

Cas $c = c(\rho)$ **et** $f = 0$

$$\rho(x,t) = \rho_0(a) \quad \text{sur la droite } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad x = a + \rho_0(a)\, t\ .$$

MODÈLE DE TRAFIC ROUTIER

Bilan global

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho\, dx + \left[Q(\rho)\right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

Bilan local / relation de saut

$$\partial_t\, \rho + \partial_x\, Q(\rho) = 0 \qquad \text{et} \qquad -\, w[\![\rho]\!] + [\![Q(\rho)]\!] = 0\ .$$

Vitesse d'un choc

$$w = \frac{Q(\rho_D) - Q(\rho_G)}{\rho_D - \rho_G} = \frac{[\![Q(\rho)]\!]}{[\![\rho]\!]}$$