PROBLÈME 1.3 Modèle de crues rapides

En l'absence de pluie et d'infiltration dans le sol, la loi de conservation de la masse du ruisselement des eaux à la surface d'un plan incliné s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) = 0 \tag{1}$$

où $h(x,t)$ est la hauteur de la lame d'eau et $U(x,t)$ sa vitesse moyenne.

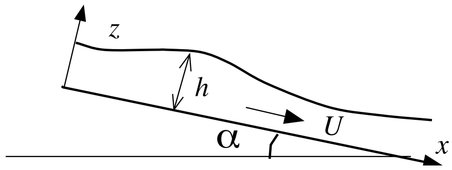

FIGURE 1 – *Ruissellement d'une lame d'eau de hauteur h et de vitesse U sur une pente faisant un angle α avec l'horizontale.*

Tracé qualitatif d'un hydrogramme

On modélise le ruissellement le long du plan incliné par la loi :

$$U = K\,\sqrt{I}\;h^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

où h est la hauteur de la lame d'eau ruissellante, U sa vitesse moyennée sur la verticale et $I = \sin\alpha$ la "pente". Le coefficient de "Strickler" K dépend du type de sol sur lequel s'effectue le ruissellement. On suppose ici qu'il est constant.

1) Une valeur du coefficient de Strickler sur un sol de type "prairie" est $K = 10$ en unités SI. Préciser cette unité en donnant la dimension de K.
2) Exprimer la loi de conservation de la masse en remplaçant U par son expression en fonction de $h(x,t)$.
3) On suppose qu'à $t = 0$ le profil de la surface libre $x \in [0, L]$ est égal à

$$h(x,0) = h_0(x) = h_*\,[1 - \cos(k\,x)] \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\pi}{L} \tag{3}$$

   Dessiner cette condition initiale et l'interpréter physiquement en invoquant le régime des précipitations qui aurait pu précéder l'établissement d'une telle nappe d'eau de ruissellement.
4) Donner l'équation des courbes caractéristiques associées à cette condition initiale.
5) Sans faire de calculs, dessiner les profils $h(x,t)$ pour différents temps t_i positifs, en supposant que l'on a $h(0,t) = 0$ pour $t \geq 0$.
6) En déduire, toujours sans calcul, le tracé de l'hydrogramme $h(L,t)$ au bas de la pente.

Tracé quantitatif d'un hydrogramme

On considère le modèle de ruissellement

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\left(h^{\frac{5}{3}}\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \beta > 0 \tag{4}$$

et la condition aux limites $h(0,t) = 0$ pour $t \geq 0$. On considère la condition initiale $h(x,0) = h_0(x)$ qui s'écrit

$$h_0(a) = h_* \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pour } a \in [0,l] \quad \text{et} \quad h_0(a) = h_* \ \text{ pour } a \in [l,L].$$

7) Donner l'équation des caractéristiques associées à cette condition initiale.
8) Calculer analytiquement la solution $h(x,t)$ pour $t \geq 0$.
9) Tracer la solution $h(x,t)$ pour des instants successifs t_i positifs.
10) En déduire l'hydrogramme $h(L,t)$ au bas de la pente et le tracer schématiquement.

Ruissellement en présence de pluie

On considère le modèle de ruissellement dans un bassin versant en présence de pluie décrit par l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{5}{3} U(h) \frac{\partial h}{\partial x} = P(t) \qquad \text{avec} \qquad U(h) = K\sqrt{I}\, h^{\frac{2}{3}} \tag{5}$$

et la condition aux limites $h(0,t) = 0$ pour $t \geq 0$. Le coefficient de Strickler K et la pente $I = \sin\alpha$ sont supposés constants. La fonction $P(t)$ modélise une pluie que l'on suppose homogène sur l'ensemble du bassin versant. On suppose que le sol est initialement sec, ce que l'on traduit par la condition initiale $h(x,0) = 0$.
Dans un premier temps, on suppose que $P(t) = P_0$ est constant.

11) Calculer l'équation des caractéristiques du modèle issues des points $(x,t) = (a,0)$ pour $a \in [0,L]$.
12) Calculer l'équation des caractéristiques issue des points $(x,t) = (0,\tau)$ pour $\tau \geq 0$.
13) Tracer toutes les courbes caractéristiques du modèle dans la région $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$.
14) Calculer l'intersection de la courbe caractéristique issue du point $(x,t) = (0,0)$ avec la droite d'équation $x = L$.
15) En déduire le temps t_* au-delà duquel l'hydrogramme $h(L,t)$ devient constant.
16) Calculer l'expression de cette valeur constante h_*.
17) Calculer numériquement, même de manière très grossière, les valeurs de t_*, en nombre de jours, et de h_*, en mm, pour une pluie P_0 de 1 mm par jour, un longueur L de 10 km, une pente $I = 0,1$ et un nombre de Strickler de $K = 10$ en unité SI.
18) Exprimer et tracer l'hydrogramme de crue $h(L,t)$ au bas de la pente.

On suppose maintenant que $P(t) = P_0$ pour $t \in [0, t_0]$ et $P(t) = 0$ pour $t \geq t_0$ avec $t_0 \geq L^{\frac{3}{5}}\, K^{-\frac{3}{5}}\, I^{-\frac{3}{10}}\, P_0^{-\frac{2}{5}}$.

19) Tracer l'hydrogramme de crue associé à cette pluie.

Corrigé page 3

Corrigé 1.3 Modèle de crues rapides

Tracé qualitatif d'un hydrogramme

1)L'unité SI pour le coefficient de Strickler est en $\mathrm{m}^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{s}^{-1}$. **2)**En remplaçant U par son expression en fonction de h, la loi de conservation de la masse $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U\, h) = 0$ devient $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\, h^{\frac{5}{3}}\right) = 0$ avec $\beta = K\, \sqrt{I}$.

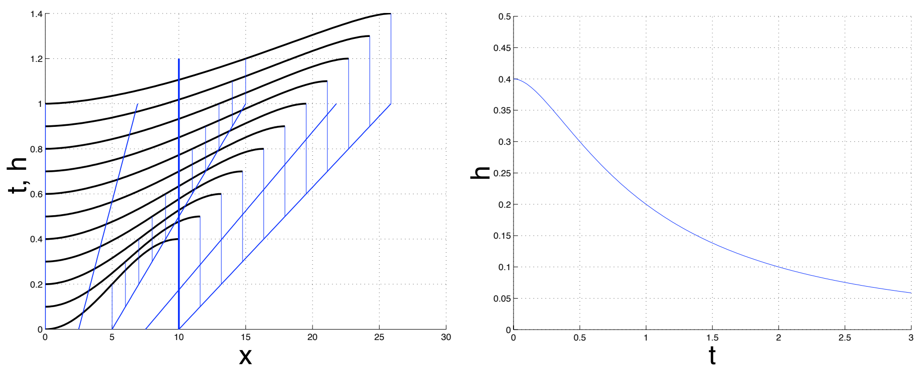

FIGURE 2 – a) *Évolution $h(x,t)$ de la condition initiale $h_0(x)$. b) Courbe $h(L,t)$ en fonction du temps.*

3)Cette condition initiale correspond à une pluie dont l'intensité a été maximale au bas de la pente et nulle au sommet. **4)**Le modèle s'écrit sous la forme $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = \frac{5}{3}\beta\ h^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}U(h)$. Les caractéristiques sont les droites d'équations $x = a + c[h_0(a)]\, t = a + \frac{5}{3}\beta\,(h_*)^{\frac{2}{3}}\,[1 - \cos(k\, a)]^{\frac{2}{3}}\ t$ pour $a \in [0, L]$. **5)**Le profil initial est étirée vers la droite, d'autant plus rapidement que l'on s'écarte de la gauche $x = 0$. **6)**L'hydrogramme $h(L,t)$ décroît, vite au début et très lentement à la fin dans la mesure où des dernières caractéristiques ont des vitesses (inverse de la pente) très lentes.

Tracé quantitatif d'un hydrogramme

7)Le modèle s'écrit $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = \frac{5}{3}\beta\, h^{\frac{2}{3}}$. Pour $a \in [0, l]$, on a $c[h_0(a)] = \gamma\, a$ avec $\gamma = \frac{5}{3}\beta\, h_*^{\frac{2}{3}}/l$. Pour $a \in [l, L]$, on a $c[h_0(a)] = c(h_*) = c_*$ avec $c_* = \gamma\, l$. Les équations des caractéristiques sont donc $x = (1 + \gamma\, t)a$ pour $a \leq l$ et $x = a + c_*\, t$ pour $a \geq l$. **8)**Les points (x,t) tels que $x \geq l + c_*\, t$ vérifient $h(x,t) = h_*$. La caractéristique qui passe par un

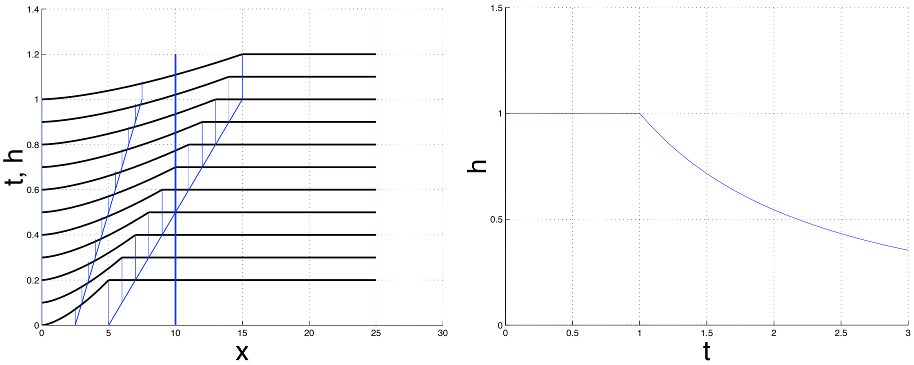

FIGURE 3 – *a) Évolution $h(x,t)$ de la condition initiale $h_0(x)$ b) Courbe $h(L,t)$ en fonction du temps.*

point (x,t) situé à gauche de cette région uniforme a pour équation $x = (1+\gamma\, t)a$. Il est ici facile d'exprimer $a = x/(1+\gamma\, t)$. Comme h est constant le long d'une caractéristique, on en déduit $h(x,t) = h_0(a) = h_0[x/(1+\gamma\, t)]$ ce qui conduit à $h(x,t) = h_*\,(x/l)^{\frac{3}{2}}\,(1+\gamma\, t)^{-\frac{3}{2}}$. **9)**Le profil initial en $a^{\frac{3}{2}}$ est étiré vers la droite, d'autant plus que l'on est loin de $a = 0$. La région des points où $h = h_*$ se déplace vers la droite à la vitesse constante $c_* = \gamma\, l$. **10)**On en déduit donc que $h(L,t) = h_*$ pour $t \in [0, t_*]$ avec $t_* = \frac{1}{\gamma}(L/l - 1)$ et que $h(x,t) = h_*(L/l)^{\frac{3}{2}}(1+\gamma\, t)^{-\frac{3}{2}}$ pour $t \geq t_*$.

Ruissellement en présence de pluie

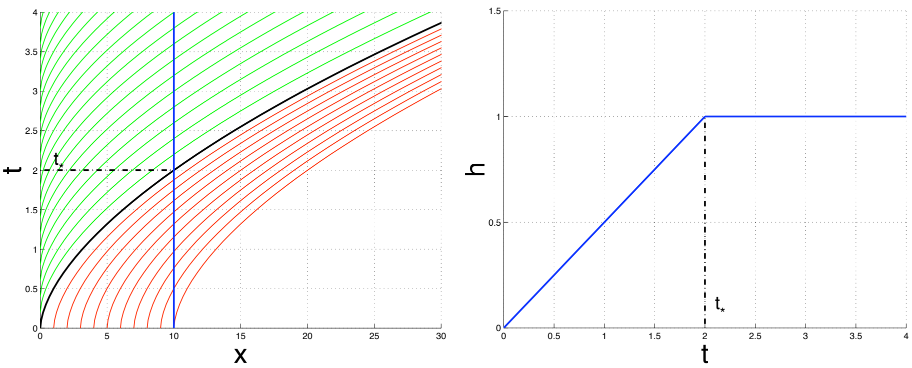

FIGURE 4 – *a) Courbes caractéristiques. b) Courbe $h(L,t)$ en fonction du temps.*

11) Les caractérsitiques sont définies par le système d'équations $\dot{x} = \frac{5}{3}\beta\, h^{\frac{2}{3}}$ et $\dot{h} = P_0$ avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $h(0) = 0$. On en déduit $h(t) = P_0\, t$ et $\dot{x} = \frac{5}{3}\,\beta\, P_0^{\frac{2}{3}}\, t^{\frac{2}{3}}$ que l'on intègre en $x(t) = a + \beta\, P_0^{\frac{2}{3}}\, t^{\frac{5}{3}}$. On vérifie qu'il s'agit bien de l'équation de la caractéristique passant par $(a,0)$. **12)**Les conditions initiales pertinentes sont ici $x(\tau)=0$ et $h(\tau)=0$. On en déduit que $h(t)=P_0(t-\tau)$ et que l'équation de la caractéristique passant par $(0,\tau)$ s'écrit $x(t)=\beta\, P_0^{\frac{2}{3}}\,(t-\tau)^{\frac{5}{3}}$. **13)**Les caractéristiques sont des courbes déduites les unes des autres par des translations dans le plan (x,t). Elles ne se coupent donc pas. **14)**L'équation de courbe caractéristique issue du point $(x,t)=(0,0)$ est $x=\beta\, P_0^{\frac{5}{3}}\, t^{\frac{5}{3}}$. Elle coupe la droite $x=L$ en (L,t_*) avec $t_*=(L/\beta)^{\frac{3}{5}}/P^{\frac{2}{5}}$. **15)**La valeur de $h(L,t)$ à l'équilibre est $h_*=P_0\,t_*=(L\,P_0/\beta)^{\frac{3}{5}}$. **16)**L'application numérique conduit à un temps t_* de l'ordre de 2 jours et une hauteur de ruissellement au bas de la pente de l'ordre de 2 mm. **17)**Les courbes caractéristiques qui atteignent le segment de droite $(x,t)=(L,t)$ avec $t\in[0,t_*]$, sont toute issue du segment de droite $(x,t)=(a,t)$ avec $a\in[0,L]$. **18)**La valeur de $h(L,t)$ est donc égale à $h(L,t)=P_0\,t$ pour $t\in[0,t_*]$ et à $h(L,t)=h_*$ pour $t\geq t_*$. **19)**On remarque que la condition sur t_0 s'écrit $t_0\geq t_*$. Au-delà de $t=t_0$, les courbes caractéristiques qui coupe la droite $x=L$ n'ont soit pas vu de pluie, soit vu de la pluie pendant le temps $t_*-(t-t_0)$ si ce temps est positif. Comme la hauteur $h(t)$ est une fonction linéaire du temps de pluie, on en déduit que l'hydrogramme de crue est $h(L,t)=P_0\,t$ pour $t\in[0,t_*]$, $h(L,t)=h_*=P_0\,t_*$ pour $t\in[t_*,t_0]$, $h(L,t)=h_*-P_0(t-t_0)=P_0(t_*+t_0-t)$ pour $t\in[t_0,t_0+t_*]$ et $h(L,t)=0$ pour $t\geq t_0+t_*$. **20)**À $t=t_0$, on a $h(x,t_0)=h_*(x/l)^{3/2}(1+\gamma\,t_0)^{-3/2}$. L'hydrogramme de crue est celui de la question 10) en prenant $t=t_0$ comme origine des temps et en remplaçant h_* par $h_*(1+\gamma\,t_0)^{-3/2}$.