EXERCICE 1.4 Modèles de l'équation de Burgers

On considère le modèle décrit par la fonction $u(x,t)$ continue ou discontinue tel que pour pour tout intervalle fixe $[x_1, x_2]$ on puisse écrire

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\ dx + \frac{1}{2}\left[u^2\right]_{x_1}^{x_2} = 0\ . \tag{1}$$

1) Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle.
2) Calculer la vitesse $w(t) = \dot{x}_c(t)$ d'un choc séparant une région uniforme $u(x,t) = u_1$ pour $x < x_c(t)$ d'une région uniforme $u(x,t) = u_2$ pour $x > x_c(t)$.
3) Répondre aux deux questions précédentes en considérant le nouveau modèle régi par l'équation $\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u^2\ dx + \frac{2}{3}\left[u^3\right]_{x_1}^{x_2} = 0$. On suppose ici que $u_1 + u_2 \neq 0$.
4) Comparer les deux modèles précédents.

On considère un troisième modèle tel que pour tout intervalle mobile $[x_1(t), x_2(t)]$ vérifiant $\dot{x}_1(t) = u[x_1(t), t]$ et $\dot{x}_2(t) = u[x_2(t), t]$ on puisse écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u(x,t)\ dx\right) - \frac{1}{2}\left[u^2\right]_{x_1(t)}^{x_2(t)} = 0\ . \tag{2}$$

5) Appliquer la formule de Leibnitz pour dériver l'intégrale par rapport au temps en supposant que $u(x,t)$ est continue. En déduire le bilan local.
6) Appliquer la formule de Leibnitz pour dériver l'intégrale par rapport au temps en supposant que $u(x,t)$ admet une discontinuité en un point $x_c(t)$ mobile de vitesse $w(t) = \dot{x}_c(t)$.
7) Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle. Comparer ce troisième modèle avec les deux précédents.

Corrigé page 2

Corrigé 1.4 Modèles de l'équation de Burgers

1)Le bilan local est $\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x\left(u^2\right) = \partial_t u + u\ \partial_x u = 0$. La relation de saut est $-w[\![u]\!] + \frac{1}{2}[\![u^2]\!] = 0$. **2)**La vitesse du choc est $w = \frac{1}{2}\frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$. C'est la moyenne des vitesse u_1 et u_2. **3)**Le bilan local est $\partial_t\left(u^2\right) + \frac{2}{3}\partial_x\left(u^3\right) = 2\,u(\partial_t u + u\ \partial_x u) = 0$. La relation de saut est $-w[\![u^2]\!] + \frac{2}{3}[\![u^3]\!] = 0$. La vitesse du choc est $w = \frac{3}{2}\frac{u_1^3 - u_1^3}{u_2^2 - u_1^2} = \frac{2}{3}\frac{u_1^2 + u_1\,u_2 + u_2^2}{u_1 + u_2}$. **4)**Les deux modèles correspondent au même bilan local mais diffèrent par leurs relations de saut. La vitesse du choc n'est donc pas la même. **5)**Dans le cas continu, la formule de Leibnitz entraîne $\int_{x_1}^{x_2} \partial_t u\ dx + \frac{1}{2}\left[u^2\right]_{x_1}^{x_2} = 0$. Le bilan local est donc $\partial_t u + u\ \partial_x u = 0$. **6)**Dans le cas discontinu, la formule de Leibnitz entraîne $\int_{x_1(t)}^{x_c^-(t)} \partial_t u \; dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2(t)} \partial_t u \; dx - w[\![u]\!] + \frac{1}{2}\left[u^2\right]_{x_1}^{x_2} = 0$. Comme $\left[u^2\right]_{x_1(t)}^{x_2(t)} = \left[u^2\right]_{x_1(t)}^{x_c^-(t)} + \left[u^2\right]_{x_c^+(t)}^{x_2(t)} + [\![u^2]\!]$, la relation de saut est $-w[\![u]\!] + \frac{1}{2}[\![u^2]\!] = 0$. Ce modèle est identique au premier modèle.