EXERCICE 0.1 DM : Modèle de trafic routier

On considère le modèle de trafic routier $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx = q(x_1,t) - q(x_2,t)$ avec $q(\rho) = \rho\, v(\rho)$. On suppose que $v(\rho) = v_0\,(1-\rho/\rho_{\max})$ avec $v_0 > 0$, $\rho_{\max} > 0$ et $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$. On notera $c(\rho) = q'(\rho)$ la dérivée de q par rapport à ρ.

Vitesses de propagation

1) Que représentent physiquement les grandeurs ρ, q et v ? Quelles sont leurs unités ? Tracer la fonction $q(\rho)$ et determiner la valeur ρ^* pour laquelle elle est maximale. Exprimer $c(\rho)$. Tracer, sur un même graphique, les fonction $v(\rho)$ et $c(\rho)$.
2) Dans le cas où $\rho(x,t)$ est dérivable, écrire l'équation aux dérivées partielles nonlinéaire que ce champ vérifie.
3) En déduire que ρ est constant le long de droites caractéristique d'équations $x = x_0 + c(\rho_0)\,t$ dans le plan (x,t). En quoi $c(\rho)$ représente-t-elle la vitesse de propagation de l'information ?
4) On suppose que le modèle décrit un choc d'équation $x = s(t)$ se déplaçant à la vitesse $w = \frac{ds}{dt}$. En notant $\rho^- = \rho[s^-(t),t]$ et $\rho^+ = \rho[s^+(t),t]$ les valeurs de ρ de part et d'autre du choc, on démontre, à partir du bilan global, que $w = [\![q]\!]/[\![\rho]\!]$ où $[\![\bullet]\!] = \bullet^+ - \bullet^-$ désigne le saut d'une grandeur $\bullet$ à travers le choc. Exprimer la vitesse w en fonction de ρ^- et ρ^+ ainsi que des paramètres du modèle.

Adimensionnalisation du modèle

On choisit un unité de longueur L et on définit les quantités adimensionnelles suivantes :

$$X = \frac{x}{L}\ ,\ T = \frac{v_0\,t}{L}\ ,\ R = \frac{\rho}{\rho_{\max}}\ ,\ V(R) = \frac{v(R\,\rho_{\max})}{v_0}\ ,\ Q(R) = \frac{q(R\,\rho_{\max})}{\rho_{\max}\,v_0} \text{ et } C(R) = \frac{c(R\,\rho_{\max})}{v_0}\ .$$

5) Montrer que le modèle s'écrit alors $\frac{d}{dT}\int_{X_1}^{X_2} R(X,T)\,dX + [Q(X,T)]_{X_1}^{X_2} = 0$ avec $V(R) = 1-R$ et $Q(R) = R\,V = R-R^2$. Dans le cas où $R(X,T)$ est dérivable, montrer que $\frac{\partial R}{\partial T} + C(R)\,\frac{\partial R}{\partial X} = 0$ avec $C(R) = Q'(R) = 1-2\,R$.
6) Tracer $V(R)$ et $C(R)$ sur un même graphe puis $Q(R)$ sur un autre.
7) Calculer la vitesse adimensionnelle $W = w/v_0$ d'un choc en fonction de R^+ et R^-.

Feu rouge et chocs

On suppose que $R = R_1$ pour $T \leq 0$ où $0 < R_1 < 1/2$ est une constante indépendante de l'espace et du temps. Pour $T \geq 0$, un feu rouge situé en $X = 0$ impose la condition aux limites $V[R(0^-,T)] = 0$ pour $X = 0^-$ et $R(0^+,T) = 0$ pour $T = 0^+$, séparant ainsi le domaine spatial en deux demi-droites disjointes.

8) Écrire les équations respectives des droites caractéristiques et des trajectoires dans le demi-plan $(X, T \leq 0)$.
9) Exprimer, en fonction de R_1, la vitesse W_g du choc qui se propage le long de la demi-droite $X \leq 0$. Dans le quart de plan $(X \leq 0, T \geq 0)$, tracer la trajectoire de ce choc en traits doubles, les caractéristiques en traits pleins et les trajectoires des voitures en traits pointillés, en choisissant la valeur particulière $R_1 = 1/4$,
10) Exprimer, en fonction de R_1, la vitesse W_d du choc qui se propage le long de la demi-droite $X \geq 0$. Dans le quart de plan $(X \geq 0, T \geq 0)$, tracer la trajectoire de ce choc en traits doubles, les caractéristiques en traits pleins et les trajectoires des voitures en traits pointillés, en choisissant la valeur particulière $R_1 = 1/4$,
11) Tracer le profil de $R(X,T)$ pour tout X à différents instants $T \geq 0$. Commenter.

Onde de détente

On suppose que le domaine $X \leq 0$, où $R = 1$, est isolé du domaine $X > 0$, où $R = 0$, à cause de l'existence du feu qui reste au rouge pour $0 \leq T \leq T_r$ où $T_r > 0$ est un temps fixé.

12) Dessiner les droites caractéristiques dans la région du plan (X, T) telle que $0 \leq T \leq T_r$.
13) À partir de $T = T_r$, le feu passe au vert et le modèle de trafic routier régit l'ensemble du domaine spatial (droite infinie), sa condition initiale pour $T = T_r$ étant le profil discontinu $R = 1$ pour $X \leq 0$ et $R = 0$ pour $X \geq 0$. Dessiner alors toutes les caractéristiques dans le demi-plan $(X, T \geq T_r)$.
14) Montrer que l'on peut alors écrire $C(R) = X/(T - T_r)$ dans une région de ce demi-plan que l'on précisera. En déduire l'expression de $R(X, T)$ dans tout le demi-plan. Tracer son profil spatial pour différentes valeur de $T \geq T_r$.

Onde de choc suivi d'une onde de détente

On suppose que $R = R_1$ pour $T \leq 0$ où R_1 est une constante indépendante de l'espace et du temps. Pour $T \geq 0$, un feu rouge situé en $X = 0$ impose la condition aux limite $V[R(0^-, T)] = 0$ pour $X = 0^-$ et $R(0^+, T) = 0$ pour $X = 0^+$, séparant ainsi le domaine spatial en deux demi-droites disjointes. À $T = T_r$, le feu passe au vert, connectant ainsi ces deux demi-droites.

15) Calculer le temps $T_a > T_r$ pour lequel le choc situé à gauche du feu n'est plus animé d'une vitesse constante.
16) Montrer que l'équation $X = S(T) = (1 - 2\,R_1)\,(T - T_r) - 2\,\sqrt{R_1\,(1 - R_1)}\,\sqrt{T_r\,(T - T_r)}$ décrit bien la trajectoire pour $T \geq T_a$ et $X \leq 0$. En déduire le temps $T_b > T_a$ pour lequel la vitesse de ce choc devient nulle.
17) On cherche à déterminer le temps $T_c > T_b$ pour lequel ce choc passe par le point $X = 0$. Montrer que sa vitesse est alors strictement positive. Effectuer un tracé schématique de la trajectoire du choc et des caractéristiques dans le demi-plan $(X \leq 0, T)$.
18) On considère le rectangle $IJCO$ défini par les coordonnées (X_I, T_I), (X_J, T_J), (X_C, T_C) et (X_O, T_O) telle que $T_I = T_O = 0$, $T_J = T_C = T_c$, $X_O = X_C = 0$ et $X_I = X_J < S(T_b)$ où $S(T) \leq 0$ pour $0 \leq T \leq T_c$ est la position du choc situé à gauche du feu. En utilisant les équations du modèle, montrer que

$$\int_{X_I}^{0} R(X, T_c)dX - \int_{X_I}^{0} R(x, 0)dX = \int_{0}^{T_c} \left[Q(X_I, T) - Q(0, T)\right]\, dT\ . \tag{1}$$

19) En déduire que $Q_1\, T_c = Q^*\,(T_c - T_r)$ avec $Q_1 = R_1 - R_1^2$ et $Q^* = 1/4$.
20) Pour un temps T_r de feu rouge donné, le temps $T_v = T_c - T_r$ du feu vert est optimum pour le confort des piétons tout en perturbant pas le trafic en amont du feu. Montrer que ce temps dépend de la densité amont R_1 à travers la relation

$$\frac{T_v}{T_r} = F(R_1) = \frac{R_1(1 - R_1)}{(1/2 - R_1)^2}\ . \tag{2}$$

21) Tracer la fonction $F(R_1)$ en fonction de $R_1 \in [0, 1/2]$. Quelle est sa valeur dans le cas particulier $R_1 = 1/4$. Commenter la variation de ce rapport de temps en fonction de l'intensité du trafic.

Corrigé page **??**