

Optimisation d'un trafic routier BE avec simulateur

Présentation du problème



Figure 1: La circulation des voitures dans la ville de Blue City.

La ville de Blue City est traversée par une route à grande circulation (figure 1). Les habitants ont cependant besoin de traverser fréquemment cette route. La solution choisie a été d'installer un feu permettant d'arrêter la circulation. Cet arrêt crée néanmoins un embouteillage. L'objectif est d'offrir aux habitants un temps de traversée de la route le plus long possible, tout en empêchant le bouchon de voiture de se propager sur une distance trop importante. Pour ce faire, vous pourrez agir sur le réglage du feu : durée de l'état « vert » (circulation libre des voitures) et durée de l'état « rouge » (circulation bloquée).

À la fin de votre mission, vous devrez être en mesure de répondre aux questions suivantes :

- Quelle longueur atteint le bouchon lorsque vous maintenez le feu au rouge pendant le temps $t_r=24$ secondes ?
- Combien de temps le feu doit-il ensuite rester au vert pour pouvoir l'évacuer entièrement ?
- Comment régler le feu rouge pour que l'extension du bouchon ne dépasse par 120 m ?

Partie 1 : Modélisation

L'ensemble des voitures est modélisé par un fluide dont la densité, en voitures par mètre, est notée $\rho(x, t)$ (figure 2). La vitesse du fluide est notée v et le débit, en voitures par seconde, est noté q . On suppose que la vitesse v est donnée par :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \quad (1)$$

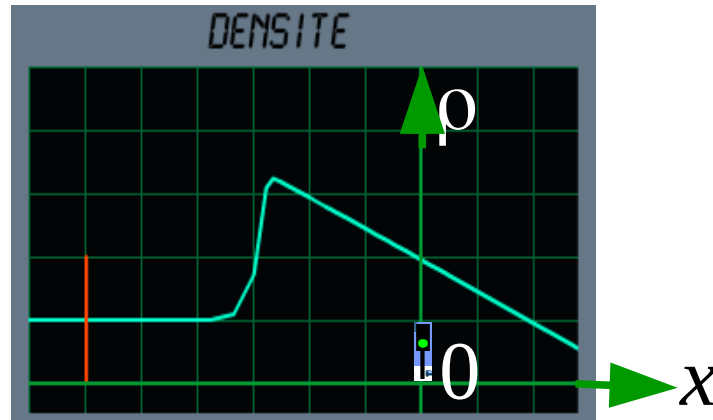


Figure 2: Densité correspondant à la circulation figure 1. Le feu est positionné en $x=0$.

Lorsque les voitures sont à l'arrêt, elles sont éloignées d'une distance L (figure 3). La densité est alors maximale et est notée ρ_{max} .



Figure 3: Voitures à l'arrêt.

Q1 : Exprimez ρ_{max} en fonction de L .

Lors d'une circulation uniforme, les voitures sont éloignées d'une distance $L+D$ (figure 4).

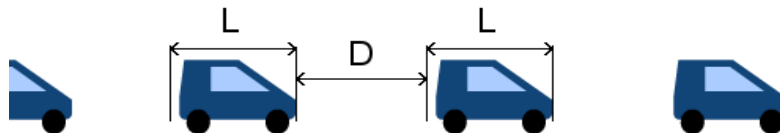


Figure 4: Voitures en circulation uniforme.

Q2 : Exprimez alors ρ en fonction de L et D .

Q3 : Exprimez q en fonction de ρ et v .

Q4 : Tracez les courbes de v et de q en fonction de ρ (position arbitraire du maximum de q).

Q5 : Exprimez q_m , la valeur maximale du débit, en fonction de ρ_{max} et v_0 .

Q6 : On note ρ_1 la densité de voiture du simulateur lorsque le feu reste au vert pendant un temps très long (circulation initiale non perturbée). On note alors v_1 la vitesse et q_1 le débit associés. Mesurer L , D et v pour cette densité et en déduire ρ_1 , v_1 , q_1 , ρ_{max} , v_0 et q_m .

On suppose que ρ et q sont reliés par la relation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Q7 : Que signifie cette équation ?

Q8 : On met l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Exprimez $c(\rho)$.

Q9 : Tracez c en fonction de ρ .

Q10 : On considère les courbes caractéristiques définies par $\frac{dX}{dt} = c[\rho(X, t)]$.

Calculez $\frac{d}{dt}[\rho(X(t), t)]$.

Q11 : Pourquoi les courbes caractéristiques sont-elles des droites ?

Partie 2 : Onde de détente

On suppose $\rho_{max}=0,25$ voitures/m, $v_0=20$ m/s et que la circulation non perturbée, en amont de la ville, correspond aux valeurs $\rho_1=\rho_{max}/4$ et $v_1=15$ m/s. On vérifiera que ces valeurs correspondent à celles du simulateur.

On désire étudier le passage au vert du feu, après que le feu soit resté rouge un temps infini (figure 5).



Figure 5: Le feu est resté rouge un temps infini.

Au bout de quelques instants, la circulation reprend (figure 6).

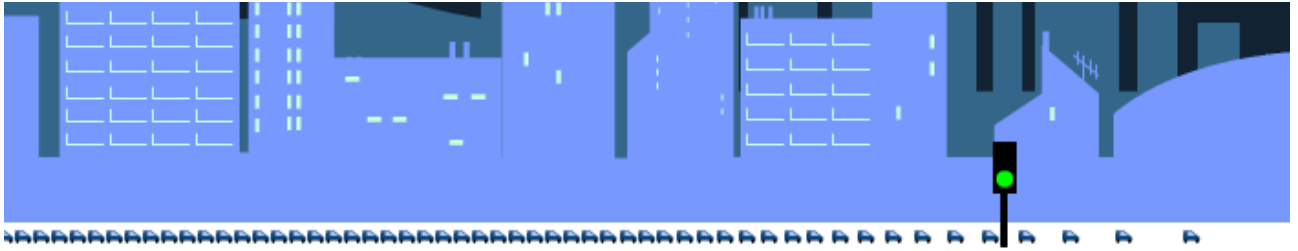


Figure 6: Le feu est passé au vert.

Les courbes de densité correspondantes sont tracées figure 7.

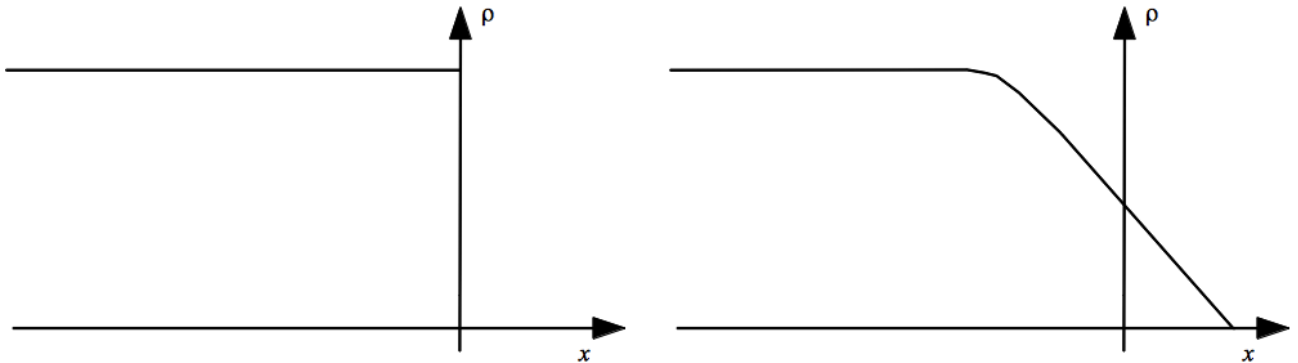


Figure 7: Densité initiale (gauche) et après quelques instants (droite)

Réalisez cette configuration avec le simulateur et observez l'évolution de la densité de voiture.

Q12 : On note $t_0=0$ s, $t_1=1$ s, $t_2=2$ s et $t_3=3$ s. Sur la feuille de réponse associée, tracez les courbes caractéristiques passant par $t=t_1$ par les points $x = -60$ m, -40 m, -20 m, -10 m, 0 m, 10 m, 20 m, 40 m et 60 m. On utilisera les valeurs de l'énoncé.

Q13 : Dédurre des courbes caractéristiques les courbes de densité et les tracer sur la même figure pour $t=t_0, t_2$ et t_3 .

Q14 : À l'aide du simulateur, mesurez la vitesse et le débit au niveau du feu comme suit :

- 1) Stoppez le temps (bouton ||). Réinitialisez le compteur du temps (bouton circulaire).
- 2) Déplacez le radar au niveau du feu (le trait rouge vertical du radar doit être caché par le trait vert vertical représentant le feu). Le radar permet d'enregistrer et d'exporter les mesures qu'il effectue. Remettez à zéro son compteur. Appuyez sur le bouton d'enregistrement (rond rouge avec l'inscription REC en dessous) pour démarrer l'enregistrement. Le radar va maintenant enregistrer une mesure de vitesse pour chaque voiture qui passe devant lui.
- 3) Passez au vert puis appuyez sur le bouton play pour relancer la simulation.
- 4) Au bout d'une trentaine de secondes (ou plus) appuyez de nouveau sur le bouton d'enregistrement du radar (qui est devenu un carré rouge).
- 5) Une nouvelle fenêtre est apparue avec les mesures de vitesses effectuées.
- 6) À l'aide d'un tableur, tracer la vitesse et le débit en fonction du temps.

Recopier la courbe produite par le tableur. Ce résultat est-il en accord avec la théorie des caractéristiques ? Relier l'écart entre la mesure et la théorie à la taille finie des voitures.

Q15 : Mesurer le débit moyen au niveau du feu sur une trentaine de seconde et comparer avec la valeur théorique.

Q16 : À quelle vitesse l'information « le feu est passé au vert » se propage vers l'arrière ? Et vers l'avant ?

Q17 : En observant le simulateur, au bout de combien de temps une voiture située à 120 m se met-elle à bouger ? Déterminez votre protocole de mesure et comparez avec la valeur théorique.

Partie 3 : Création du bouchon

On désire calculer la vitesse d'allongement du bouchon créée par le passage du feu au rouge lors d'une circulation initialement uniforme (figure 8). La densité correspondante est tracée figure 9.

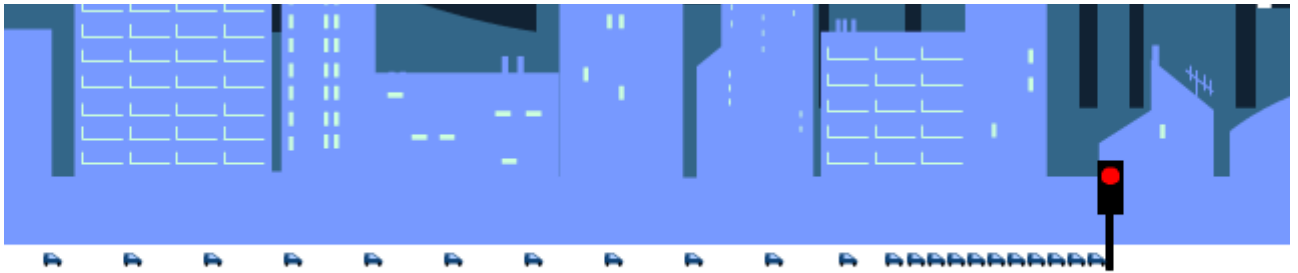


Figure 8: Bouchon formé par le passage du feu au rouge.

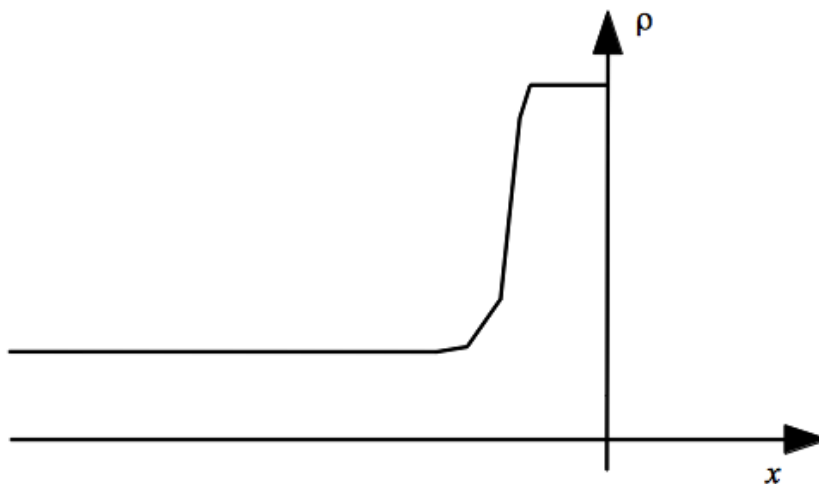


Figure 9: Densité correspondante au bouchon.

Q18 : Dans cette configuration un choc se forme à en amont du feu. Pourquoi ?

Q19 : Exprimez la vitesse w de ce choc en fonction de q^- , ρ^- les valeurs du débit et de la densité tout de suite à gauche du choc, et q^+ , ρ^+ les valeurs du débit et de la densité tout de suite à droite du choc.

Q20 : Exprimez les valeurs de q^- , ρ^- , q^+ et ρ^+ en fonction de q_m et ρ_{max} . Mesurez la vitesse d'allongement du bouchon puis comparez avec la valeur théorique.

Q21 : Tracez sur la feuille de réponse correspondante la trajectoire du choc dans le plan (x, t) .

Q22 : Tracez sur la même feuille de réponse les caractéristiques à gauche du feu passant :

- pour $t=t_1$ par les positions $x \in \{-40, -30, -20, -10\}$ m

- pour $x=0$ par les instants $t \in \{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ s

Q23 : Tracez sur la même feuille les courbes de densité pour $t \in \{t_0; t_2; t_3\}$.

Q24 : Application numérique. Calculer l'extension $|x_r|$ du bouchon lorsque le feu passe au vert, c'est-à-dire lorsque $t=t_r$ avec $t_r=24$ s. Vérifiez ce résultat à l'aide du simulateur.

Partie 4 : Évacuation du bouchon

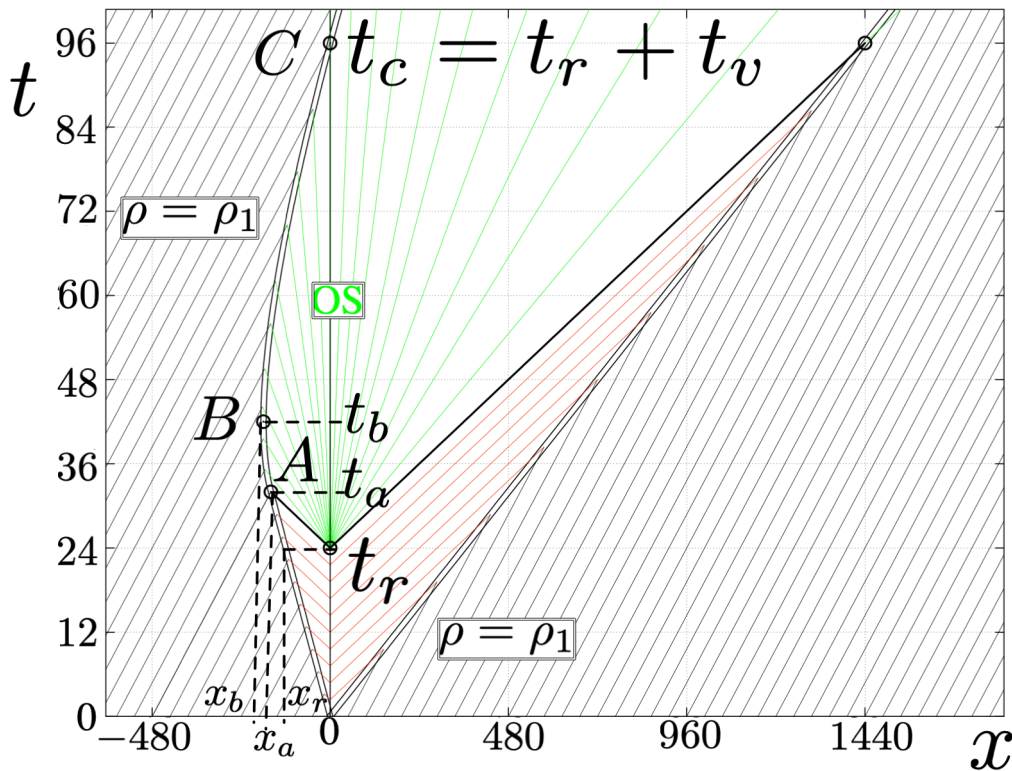


Figure 10: Correction du devoir maison avec les unités du présent sujet.

On considère le bouchon créé par le feu mis au rouge pendant une durée t_r . La circulation est supposée initialement uniforme, de densité ρ_0 . Il s'agit de calculer la durée t_v de feu vert nécessaire pour évacuer la totalité du bouchon. La trajectoire $s(t)$ du bouchon (choc) est représentée figure 10 (points A, B, C) et son expression analytique, pour $t > t_a$ est donnée par l'expression (voir DM) :

$$\frac{s(t)}{v_0} = \left(1 - 2 \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right) (t - t_r) - 2 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_{max}} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right)} \sqrt{t_r (t - t_r)}. \quad (4)$$

Une image de la circulation à un instant donné est présentée figure 1 et la densité correspondante est présentée figure 2. Réalisez cette expérience avec le simulateur en choisissant $t_r=24$ s, et observez l'évacuation du bouchon.

Q25: Décrire schématiquement, en nommant les points A, B et C, la trajectoire du choc.

Q26 : Décrire schématiquement, l'évolution temporelle de la densité de part et d'autre du choc ?

Q27 : Quelle est la valeur de la densité à droite du choc lorsque celui-ci arrive au niveau du feu (point C) ? Retrouvez ce résultat à l'aide de la figure 10.

Q28: Au bout de combien de temps le choc commence-t-il à ralentir (point A) ? Exprimez les coordonnées x_a et t_a du point A en fonction t_r et v_o .

Q29 : Exprimez les densités à gauche et à droite du choc au point A en fonction de ρ_{max} puis comparez à vos mesures.

Q30 : Quelle est la valeur de la densité à gauche et à droite du choc au point B (vitesse du choc nulle) ?

Q31 : Quelle est la vitesse w du choc au point C ? Détaillez.

Q32 : En considérant le débit q_1 arrivant dans la ville et connaissant le débit traversant le feu avant le passage du choc par la théorie des caractéristiques (Q15), calculer la durée t_v nécessaire pour évacuer le bouchon créé par le passage du feu au rouge pendant la durée t_r .

Q33 : On désire mesurer, à l'aide du simulateur, l'instant de passage du choc au niveau du feu (coordonnée t_c du point C) pour ensuite la comparer à la théorie.

- 1) Réinitialisez la position des voitures pour mettre une circulation uniforme. Réinitialisez le chronomètre.
- 2) Passez le feu au rouge. Lancez la simulation pour une durée de 24 secondes puis mettez la en pause (bouton | |). Passez alors le feu au vert.
- 3) Déplacez le radar au niveau du feu (le trait rouge vertical du radar doit être caché par le trait vert vertical représentant le feu). Le radar permet d'enregistrer et d'exporter les mesures qu'il effectue. Remettez à zéro son compteur. Appuyez sur le bouton d'enregistrement (rond rouge avec l'inscription REC en dessous) pour démarrer l'enregistrement. Le radar va maintenant enregistrer toutes les mesures de vitesse qu'il effectue.
- 4) Appuyez sur le bouton play pour continuer la simulation jusqu'à que le choc soit passé devant le feu et disparu de l'écran, puis appuyez sur le bouton pause.
- 5) Appuyez de nouveau sur le bouton d'enregistrement du radar (qui est devenu un carré rouge).
- 6) Une nouvelle fenêtre est apparue avec les mesures de vitesses effectuées. Grâce à un tableur, tracez la courbe de densité en fonction du temps à l'endroit du radar.

Ajoutez sur cette courbe la courbe théorique obtenue grâce à la valeur de t_v obtenue précédemment.

Q34 : Observez les différences entre les deux courbes et commentez.

Partie 5 : Conclusion

Q36 : Mesurez l'extension maximale du bouchon $|x_b|$ obtenu pour le choix $t_r=24$ s et comparer avec l'expression analytique. On a $\frac{t_b}{t_r} = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_{max}} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right) \left(1 - 2 \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right)^{-2}$ (voir Devoir Maison).

Q37 : Quelle est la nouvelle durée de feu rouge t_r permettant de limiter $|x_b|$ à 120 m ?

Références

- Conception originale et évolution du BE (2012-2015) : J.-F. Parmentier, A. Harang et O. Thual
- Évolution du BE (2016-2017): J. Mougel, M. Mercier et O. Thual
- J.-F. Parmentier et O. Thual, [Modèle de trafic routier et caractéristiques](#), Éd. Ress. Pédago. Ouv. INPT **1013** (2012) 6h
- O. Thual, Devoir Maison, Modèle de trafic routier, 2012.