

Modèle de trafic routier et caractéristiques

O. Thual et J.-F. Parmentier, May 7, 2012

Sommaire

1	Dérivée le long de courbes	4
1.1	Courbe à vitesse bornée	5
1.2	Dérivée d'un champ le long d'une courbe	6
1.3	Famille de courbes à vitesses bornées	6
1.4	Représentation lagrangienne pour le mouvement 1D	7
2	Résolution générale de l'équation d'advection	7
2.1	Construction des solutions avec un famille de courbes	8
2.2	Méthode des caractéristiques	9
2.3	Point de vue du changement de variable	10
2.4	Point de vue du système dynamique	11
3	Résolution de cas particuliers	12
3.1	Cas particulier $c = c_0$	13
3.2	Cas particulier $c = c(x)$	14
3.3	Cas particulier $c = c(\rho)$ et $f = 0$	15
4	Modèle simple du trafic routier	17
4.1	Du bilan global au bilan local	17
4.2	Ondes de détente et méthode des caractéristiques	19
4.3	Ondes de compression et relation de saut	20

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

Le but de cet article pédagogique multimedia est d'exposer en détail la méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t)$ par la méthode des caractéristiques. Cet article est une première étape pour la compréhension de la méthode générale des caractéristiques pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles en (x, t) hyperbolique.

Plusieurs objectifs de formation sont visés :

- Comprendre la notion de dérivée d'une fonction $\rho(x, t)$ le long d'une courbe \mathcal{L} du plan (x, t) .
- Visualiser la résolution de l'équation aux dérivées partielles par le tracé des courbes caractéristiques \mathcal{C} .
- Formuler l'équivalence entre la résolution de l'équation aux dérivées partielles et celle du système dynamique associé par la méthode des caractéristiques, en particulier par la connection entre les conditions initiales des deux problèmes.
- Visualiser les limites de la méthode lorsque les courbes caractéristiques se coupent et identifier la nécessité d'une modélisation supplémentaire pour décrire d'éventuel chocs.
- Maîtriser la résolution des cas particuliers linéaires $c = c_0$ et $c = c(x)$ et du cas particulier nonlinéaire $c = c(\rho)$ avec $f = 0$ dans le cas nonlinéaire.

Les compétences à acquérir sont les suivantes :

- Maîtriser l'ensemble des notations utilisées dans la discussion.
- Être capable d'explicitier le changement de variable permettant de formuler la méthode des caractéristiques.
- Appliquer la méthode des caractéristiques pour tout choix de c et de f en discernant si le problème peut être résolu analytiquement (sur les cas simples) ou si l'on doit recourir à une méthode numérique.

PRÉ-REQUIS

Aucun pré-requis autre que les connaissances de base (niveau BAC+2) de l'analyse (dérivées partielles, primitives, équations différentielles ordinaires...) n'est nécessaire pour aborder cet article pédagogique.

NOTATIONS

a	Position de x pour $t = 0$ (m)
$A(x, t)$	Mouvement inverse des caractéristiques (m)
$b(\underline{x}, t)$	Champ scalaire quelconque
\underline{b}	Vecteur quelconque ou matrice colonne
b_i	Composantes d'un vecteur quelconque \underline{b}
$c(\rho, x, t)$	Vitesse d'advection (m s ⁻¹)
c_0	Vitesse d'advection constante (m s ⁻¹)
$c_{\mathcal{L}}(t)$	Vitesse de la courbe \mathcal{L} (m s ⁻¹)
$c_{\mathcal{C}}(t)$	Vitesse de la courbe \mathcal{C} (m s ⁻¹)
\mathcal{C}	Courbe caractéristique dans le plan (x, t)
\mathcal{C}_a	Courbes caractéristiques paramétrées par a
$C(\rho)$	Vitesse d'advection $Q'(\rho)$ (m s ⁻¹)
$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$	Dérivée par rapport au temps le long de la courbe \mathcal{L} (s ⁻¹)
$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}}$	Dérivée par rapport au temps le long de la courbe \mathcal{C} (s ⁻¹)
$\frac{\partial}{\partial t}$	Opérateur dérivée partielle par rapport au temps (s ⁻¹)
$\frac{\partial}{\partial x}$	Opérateur dérivée partielle par rapport à x (m ⁻¹)
f	Terme de production de l'équation d'advection (arbitraire s ⁻¹)
$F_t(p, q)$	Lien $F_t(p, q) = 0$ entre q et p
$\llbracket f \rrbracket$	Notation pour $f_D - f_G$ ()
f_G, f_D	Valeurs de f à gauche et à droite d'une discontinuité ()
K	Point du plan (x, t) où débute un choc
\mathcal{L}	Courbe dans le plan (x, t)
p	Notation pour ρ dans l'espace des phases (q, p) (arbitraire)
q	Notation pour x dans l'espace des phases (q, p) (m)
$P_t(q)$	Solution de l'équation implicite $F_t(p, q) = 0$
Q	Flux de véhicules (s ⁻¹)
t	Temps (s)
τ	Temps pour le changement de variable (s)
t_I	Temps au-delà duquel w est constante (s)
$\underline{U}(q, p, t)$	Vecteur vitesse dans l'espace (q, p)
1D	Unidimensionnel
$V(\rho)$	Vitesse des véhicules (m s ⁻¹)
V_{\max}	Vitesse maximum des véhicules (m s ⁻¹)
x	Coordonnée spatiale (m)
$x(t)$	Solution du système dynamique (m)
\dot{x}	Dérivée de $x(t)$ (m s ⁻¹)
$x_{\mathcal{L}}(t)$	Trajectoire de la courbe \mathcal{L} (m)
$x_{\mathcal{C}}(t)$	Trajectoire de la courbe \mathcal{C} (m)
$X(a, t)$	Mouvement des caractéristiques (m)

$x_c(t)$	Trajectoire d'un choc (m)
$[x_1, x_2]$	Intervalle fixe sur l'axe Ox (m)
x_g, x_d	Coordonnées spatiales avec $x_g < x_d$ (m)
$\rho(x, t)$	Champ scalaire (arbitraire)
$\rho_{\mathcal{L}}(t)$	Évolution du scalaire ρ le long de la courbe \mathcal{L} (arbitraire)
$\rho_0(x)$	Condition initiale (arbitraire)
$\rho(t)$	Solution du système dynamique (arbitraire)
$\dot{\rho}$	Dérivée par rapport au temps de ρ (arbitraire s^{-1})
ρ	Densité linéique de véhicules (m^{-1})
ρ_{\max}	Valeur de ρ lorsque $V = V_{\max}$ (m^{-1})
ρ_*	Valeur de ρ lorsque Q est maximum (m^{-1})
$\underline{\rho}(x, t)$	Champ vectoriel (arbitraire)

COURS ECRIT

Introduction

On présente ici la méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles unidimensionnelle (1D) suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \quad (1)$$

dans le cas général ou dans les cas particuliers où les fonctions c et f sont indépendantes de certaines de leurs variables.

Cette équation représente l'advection d'un champ scalaire $\rho(x, t)$ par le champ de vitesse $c(\rho, x, t)$ qui dépend de l'espace x et du temps t ainsi que la valeur du champ ρ lui-même. Le terme $f(\rho, x, t)$ représente un terme de production de la grandeur ρ . Ce type d'équation se rencontre très souvent en mécanique des fluides.

L'examen approfondi de cet exemple est un préalable pour la présentation de la méthode des caractéristiques utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles en (x, t) hyperbolique couplant l'évolution de plusieurs champs scalaires. Cette présentation traite en fait de la méthode des caractéristiques dans le cas le plus simple possible.

1 Dérivée le long de courbes

On définit ici la dérivée d'un champ $\rho(x, t)$ le long d'une courbe \mathcal{L} du plan (x, t) . On se limite au cas des courbes \mathcal{L} que l'on peut décrire par une équation

$x = x_{\mathcal{L}}(t)$ et qui admettent donc une vitesse $c_{\mathcal{L}} = \dot{x}_{\mathcal{L}}$ bornée. Cette notion de dérivée est facile à définir intuitivement : on regarde la variation de ρ en suivant la courbe \mathcal{L} et on dérive par rapport au temps. La difficulté principale de ce paragraphe réside dans la définition de notations : $\rho^{(L)}(a, t) = \rho[x_{\mathcal{L}}(t), t]$ avec $a = x_{\mathcal{L}}(0)$, $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \frac{\partial\rho}{\partial t}^{(L)} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + c_{\mathcal{L}}\frac{\partial\rho}{\partial x}$ avec $c_{\mathcal{L}} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \dot{x}_{\mathcal{L}}$, etc... Lorsque l'on considère une famille de courbes \mathcal{L}_a paramétrée par a , on peut faire l'analogie entre les dérivées d'un champ le long de ces courbes et sa dérivée particulière pour le mouvement 1D défini par ces courbes. Les notions de représentations lagrangienne et eulérienne sont alors pertinentes pour comprendre la complexité des notations.

1.1 Courbe à vitesse bornée

On considère une courbe \mathcal{L} de longueur finie ou infinie dans le plan (x, t) . On dit que c'est une courbe "à vitesse bornée" si on peut la décrire par une fonction dérivable $x = x_{\mathcal{L}}(t)$ où t appartient à un intervalle fini ou infini. On peut en effet appeler "vitesse" la dérivée de la fonction $x_{\mathcal{L}}$ par rapport à la variable t que l'on nomme variable temps et la noter

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t) \quad \text{ou encore} \quad c_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t). \quad (2)$$

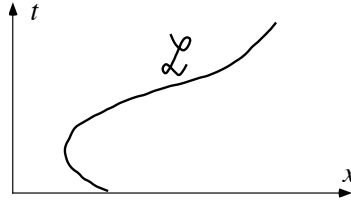


Figure 1: Courbe \mathcal{L} à vitesse bornée

Dans un plan (x, t) où x est sur l'axe des abscisses et t sur l'axe des ordonnées, la vitesse est l'inverse de la pente de la courbe \mathcal{L} lorsque l'on visualise localement la courbe \mathcal{L} comme un morceau de fonction exprimant t (en ordonnée) en fonction de x (en abscisse). Tant que la vitesse reste bornée, cette pente ne s'annule pas. On peut donc associer une seule valeur de x à une valeur de t donnée.

Exemples : la courbe définie par $x + vt - \gamma t^2 = 0$ est à vitesse bornée. La courbe définie par $\nu t + x^2 = 0$ à une vitesse infinie pour $x = t = 0$. La courbe définie par $t = 0$ à une vitesse infinie pour tout x .

1.2 Dérivée d'un champ le long d'une courbe

On considère un champ $\rho(x, t)$ différentiable dans le plan (x, t) et une courbe \mathcal{L} à vitesse bornée d'équation $x = x_{\mathcal{L}}(t)$. On appelle "dérivée de ρ le long de \mathcal{L} " la quantité

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_{\mathcal{L}}(t) \frac{\partial}{\partial x}\right] \rho[x_{\mathcal{L}}(t), t] \quad (3)$$

avec $c_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t)$. En notant $\rho_{\mathcal{L}}(t) = \rho[x_{\mathcal{L}}(t), t]$, un calcul simple montre que $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \dot{\rho}_{\mathcal{L}}$. On vérifie trivialement que si $\rho(x, t) = x$, cette notation $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$ coïncide avec la notation $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$ définie précédemment et désignant la "vitesse" associée à la courbe \mathcal{L} .

1.3 Famille de courbes à vitesses bornées

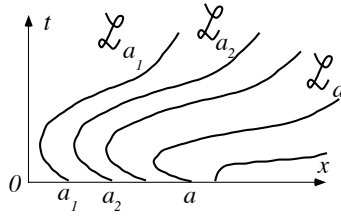


Figure 2: Famille de courbes \mathcal{L} à vitesse bornée

On considère maintenant une famille de courbes à vitesses bornées que l'on choisit de paramétrer par ses intersections a avec l'axe $t = 0$. La courbe \mathcal{L}_a passe donc par le point $(a, 0)$ du plan (x, t) . L'ensemble des fonctions $x_{\mathcal{L}_a}(t)$ qui décrivent les courbes \mathcal{L}_a permet de définir une fonction $X(a, t)$ à travers la relation

$$x_{\mathcal{L}_a}(t) = X(a, t) . \quad (4)$$

On peut alors écrire $c_{\mathcal{L}_a} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}_a} = \frac{\partial X}{\partial t}(a, t)$. On peut appeler $X(a, t)$ le "mouvement 1D" dont les trajectoires sont les courbes \mathcal{L}_a dans le plan (x, t) .

Lorsque les courbes \mathcal{L}_a ne se coupent pas, il est possible de définir le mouvement inverse $A(x, t)$ qui associe à tout point x la position $a = A(x, t)$ à $t = 0$ de la courbe \mathcal{L} qui passe par x au temps t .

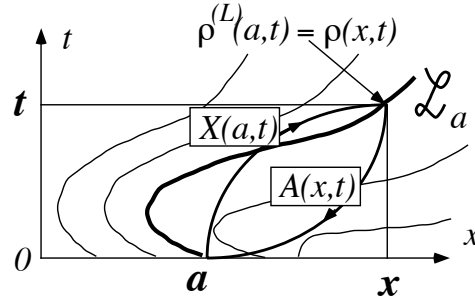


Figure 3: Représentations eulérienne $\rho(x, t)$ et lagrangienne $\rho^{(L)}(a, t)$ du champ ρ pour le mouvement $X(a, t)$ et le mouvement inverse $A(x, t)$.

1.4 Représentation lagrangienne pour le mouvement 1D

Étant donné un champ $\rho(x, t)$, on peut alors définir le champ $\rho^{(L)}(a, t)$ par la relation

$$\rho^{(L)}(a, t) = \rho_{\mathcal{L}_a}(t) = \rho[X(a, t), t] . \quad (5)$$

On voit que $\rho(x, t)$ peut être considéré comme la représentation eulérienne du champ ρ et $\rho^{(L)}(a, t)$ comme sa représentation lagrangienne pour le mouvement unidimensionnel $X(a, t)$. La quantité $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}_a}$ peut être vue comme la dérivée particulaire du champ ρ pour le mouvement $X(a, t)$.

Réciproquement, si l'on connaît la représentation lagrangienne $\rho^{(L)}(a, t)$ pour le mouvement 1D, c'est-à-dire $\rho_{\mathcal{L}_a}(t)$ pour toutes les courbes \mathcal{L}_a , on peut retrouver la représentation eulérienne $\rho(x, t)$ du champ ρ grâce au mouvement inverse $A(x, t)$. En effet, on peut écrire

$$\rho(x, t) = \rho^{(L)}[A(x, t), t] . \quad (6)$$

2 Résolution générale de l'équation d'advection

On montre ici que la résolution de l'équation d'advection, qui est une équation aux dérivées partielles, se ramène à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires pour une famille de conditions initiales. Ce système définit une famille de courbes \mathcal{C} à vitesse bornée que l'on nomme "courbes caractéristiques". Dans le cas particulier où $f = 0$, la quantité ρ est invariante le long de ces courbes (invariant de Riemann). Dans le cas général, la variation de ρ le long de ces courbes est alors égale à f .

La méthode des caractéristiques consiste donc à résoudre ce “système dynamique” en utilisant comme conditions initiales les valeurs de x et de ρ supposées connues sur une courbe \mathcal{L} du plan (x, t) . Cette méthode peut aussi s’interpréter comme un changement de variable. Sa validité cesse lorsque les courbes caractéristiques se coupent. Ce cas correspond à l’apparition de singularités dans la solution de l’équation d’advection.

2.1 Construction des solutions avec une famille de courbes

Les notions introduites sur la dérivation le long d’une courbe ou d’une famille de courbes sont utiles pour présenter la méthode de résolution de l’équation aux dérivées partielles suivante, que l’on appellera “équation d’advection” :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t). \quad (7)$$

On peut en effet remplacer cette équation aux dérivées partielles par la recherche d’une famille de courbes \mathcal{C} d’équations $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ et d’une famille de fonctions $\rho_{\mathcal{C}}(t)$ solutions du système d’équations différentielles ordinaires couplées

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathcal{C}}(t) = c(\rho_{\mathcal{C}}, x_{\mathcal{C}}, t) \\ \dot{\rho}_{\mathcal{C}}(t) = f(\rho_{\mathcal{C}}, x_{\mathcal{C}}, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = c(\rho, x, t) \\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f(\rho, x, t) \end{cases} \quad (8)$$

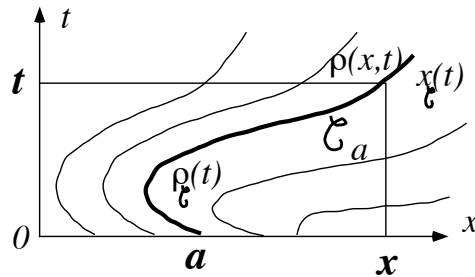


Figure 4: Famille de courbes caractéristiques.

Pour le démontrer, considérons la famille des solutions $[x_{\mathcal{C}_a}(t), \rho_{\mathcal{C}_a}(t)]$ de ce système d’équations différentielles ordinaires, que l’on a paramétrée par les intersections $a = x_{\mathcal{C}_a}(0)$. La famille des courbes \mathcal{C}_a d’équations $x = x_{\mathcal{C}_a}(t)$ permet de définir un mouvement unidimensionnel par la relation $x = X(a, t) = x_{\mathcal{C}_a}(t)$. On peut aussi définir la fonction $\rho^{(L)}(a, t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ à partir de cette famille de solutions.

Si on suppose que les courbes \mathcal{C}_a ne se coupent pas, on peut alors définir le mouvement inverse $a = A(x, t)$ et construire la représentation eulérienne du champ $\rho(x, t)$ à partir des solutions $\rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ en écrivant

$$\rho(x, t) = \rho^{(L)} [A(x, t), t] = \rho_{\mathcal{C}_{A(x,t)}}(t). \quad (9)$$

En utilisant la définition de dérivée du champ $\rho(x, t)$ le long des courbes \mathcal{C} , on peut donc écrire

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_c(x, t) = \frac{\partial\rho}{\partial t}(x, t) + c[\rho(x, t), x, t] \frac{\partial\rho}{\partial x}(x, t) \quad (10)$$

où l'on a utilisé $c_{\mathcal{C}}(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_c(t) = \dot{x}_{\mathcal{C}}(t) = c[\rho_{\mathcal{C}}(t), x_{\mathcal{C}}(t), t]$. On a ainsi construit un champ $\rho(x, t)$ solution de l'équation aux dérivées partielles de départ. En effet, cette équation s'écrit sous la forme de la relation

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_c(x, t) = f(\rho, x, t), \quad (11)$$

qui a été imposée dans la construction du champ ρ le long des courbes \mathcal{C} .

On dit que les courbes \mathcal{C} sont les “courbes caractéristiques” de l'équation aux dérivées partielles. On a ainsi ramené la résolution de cette équation à la détermination d'un ensemble de solutions (trajectoires) d'un système d'équations différentielles ordinaires couplées.

2.2 Méthode des caractéristiques

Supposons par exemple que l'on connaisse la condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ de l'équation aux dérivées partielles. La résolution du système d'équations différentielles ordinaires avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $\rho(0) = \rho_0(a)$ permet de résoudre le problème, dans la région du plan (x, t) où les courbes caractéristiques ne se coupent pas. Dans cette région, il est possible de construire une solution $\rho(x, t)$ de l'équation aux dérivées partielles à partir des solutions du système d'équations différentielles ordinaires. Dans les régions où ces courbes se coupent, les solutions du systèmes d'équations différentielles ordinaires conduisent à des fonctions $\rho(x, t)$ multivaluées. Sur la frontière de ces deux types de régions, les solutions de l'équations aux dérivées partielles cessent d'être continues et il y a donc apparitions de chocs. Il faut alors invoquer d'autres équations (les relations de saut) pour calculer la dynamique de ces chocs.

Plus généralement, il suffit de connaître la valeur de $\rho(x, t) = \rho_{\mathcal{L}}(t)$ sur une courbe \mathcal{L} transverse aux courbes caractéristiques pour pouvoir résoudre

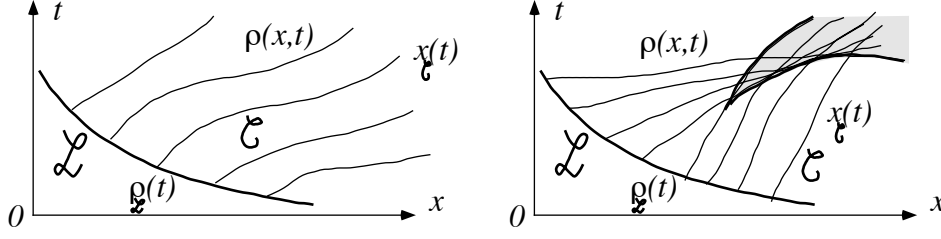


Figure 5: Méthode des caractéristiques : (a) cas où les courbes caractéristiques ne se coupent pas, (b) cas où elles se coupent.

l'équations aux dérivées partielles. En effet, les courbes caractéristiques “propagent” l'information dans le plan (x, t) à partir de l'information connue sur la courbe \mathcal{L} . Dans le cas général, on ne sait pas a priori si une courbe \mathcal{L} sera transverse ou non aux courbes caractéristiques dont la forme est déterminée par la valeur de ρ sur \mathcal{L} .

2.3 Point de vue du changement de variable

Une autre manière de présenter ou de voir la méthode des caractéristiques consiste à considérer le changement de variable permettant de passer du couple (x, t) au couple de nouvelles variables (a, τ) définies par les relations

$$\begin{cases} da &= dx - c[\rho(x, t), x, t] dt \\ d\tau &= dt \end{cases} \quad (12)$$

Ce changement de variable est défini sous forme d'un système différentiel qui conduit à des relations de la forme

$$\begin{cases} a &= A(x, t) \\ \tau &= t \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} x &= X(a, \tau) \\ t &= \tau \end{cases} \quad (13)$$

que l'on ne peut pas déterminer, dans le cas général, sans connaître le champ $\rho(x, t)$. Ces relations différentielles sont en effet des notations pour les relations

$$\begin{cases} da &= dx - c dt \\ d\tau &= dt \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x}(x, t) &= 1 \\ \frac{\partial A}{\partial t}(x, t) &= -c[\rho(x, t), x, t] \end{cases} \quad (14)$$

Les conditions $X(a, 0) = a$ ou $A(x, 0) = x$ permettent de définir de manière unique le changement de variable.

On peut exprimer les opérateurs différentiels $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ en fonction de $\left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ en transposant la relation différentielle

$$\begin{pmatrix} da \\ d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} \quad (15)$$

En notant $\rho^{(L)}(a, \tau)$ l'expression du champ $\rho(x, t)$ pour les nouvelles variables, l'équation d'advection scalaire s'écrit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho &= \left(-c \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \tau} + c \frac{\partial}{\partial a} \right) \rho^{(L)} = \\ \frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial \tau}(a, \tau) &= f \left[\rho^{(L)}(a, \tau), X(a, \tau), \tau \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

On peut aussi exprimer le changement de variable inverse sous la forme

$$\begin{cases} dx &= da + c d\tau \\ dt &= d\tau \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial a}(a, \tau) = 1 \\ \frac{\partial X}{\partial \tau}(a, \tau) = c \left[\rho^{(L)}(a, \tau), X(a, \tau), \tau \right] \end{cases} \quad (17)$$

Ce changement de variable permet donc de ramener la résolution de l'équation d'advection au système d'équations différentielles ordinaires couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \tau}(a, \tau) &= c \left[\rho^{(L)}(a, \tau), X(a, \tau), \tau \right] \\ \frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial \tau}(a, \tau) &= f \left[\rho^{(L)}(a, \tau), X(a, \tau), \tau \right] \end{cases} \quad (18)$$

Ce point de vue du changement de variable conduit à la même méthode des caractéristiques qui permet de ramener une équation aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles couplées. De manière condensée et avec des abus de notations, on peut résumer en disant que l'équation d'advection scalaire (aux dérivées partielles) se résout en écrivant :

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_C = f(\rho, x, t) \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = c(\rho, x, t). \quad (19)$$

2.4 Point de vue du système dynamique

Nous avons vu que la méthode des caractéristiques conduisant à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{q} &= c(p, q, t) \\ \dot{p} &= f(p, q, t) \end{cases} \quad (20)$$

en notant $q = x$ et $p = \rho$. La théorie des systèmes dynamiques étudie les équations différentielles ordinaires couplées en considérant toutes les conditions initiales $[q(0), p(0)] = (q_0, p_0)$ possibles. Le plan (q, p) est appelé "espace des phases". Le vecteur (c, f) définit en tout point de cet espace peut être vu comme un champ de vitesse. Les solutions $[q(t), p(t)]$ sont naturellement appelées des trajectoires.

La résolution de l'équation d'advection scalaire $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = f$ avec sa condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ s'obtient en résolvant le système dynamique

pour l'ensemble des conditions initiales décrivant la courbe $p_0 = \rho_0(q_0)$. À un instant t donné, la solution $\rho(x, t)$ s'obtient en décrivant l'ensemble des positions (états) $[q(t), p(t)]$ des trajectoires sous la forme d'une courbe $p = P_t(q)$ lorsque c'est possible. On a alors $\rho(x, t) = P_t(x)$. Mais il peut se faire que ce l'ensemble des positions ne puissent pas se mettre sous cette forme univaluée pour p mais sous la forme plus générale $F_t(p, q) = 0$ où plusieurs valeurs de p peuvent être associées à une seule valeur de q . Cette situation se produit lorsque plusieurs courbes caractéristiques se coupent dans le plan (x, t) . L'équation d'advection scalaire cesse alors d'être valide dans la mesure où la solution n'est plus continue. Sur le plan de la physique décrite par le modèle, il faut spécifier des "relations de saut" pour décrire la dynamique de ces chocs. Sur le plan des mathématiques, la résolution du système dynamique est un moyen de prolonger la résolution de l'équation aux dérivées partielles au-delà du temps où apparaît le choc. Mais cette prolongation n'a pas forcément de sens pour le problème physique modélisé.

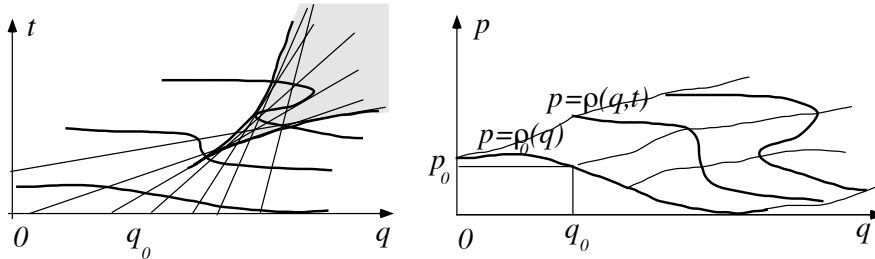


Figure 6: Trajectoires du système dynamique et formation d'un choc

3 Résolution de cas particuliers

On a donc présenté la méthode générale de résolution de l'équation d'advection d'un scalaire qui consiste à transformer l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires. Par abus de notation, ce système pourra s'écrire

$$\begin{cases} \dot{q} = c(p, q, t) \\ \dot{p} = f(p, q, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = c(\rho, x, t) \\ \dot{\rho} = f(\rho, x, t) \end{cases} \quad (21)$$

en distinguant bien les notations $[x(t), \rho(t)]$ qui désignent les trajectoires du système dynamique et la notation $\rho(x, t)$ qui désigne le champ scalaire que l'on cherche à déterminer.

On suppose que la condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ est connue et l'on cherche le champ $\rho(x, t)$ pour tout temps. On doit donc trouver les trajectoires du

système dynamique avec les conditions initiales $[q(0), p(0)] = (q_0, p_0)$ situées sur la courbe $p_0 = \rho_0(q_0)$. En utilisant les notations (x, ρ) pour le système dynamique, on cherche donc à résoudre l'ensemble des trajectoires $[x(t), \rho(t)]$ issues des conditions aux limites $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$.

On examine ici certains cas particuliers pour lesquels les courbes caractéristiques sont des droites ou des courbes parallèles. Ces cas particulier sont résumés dans le tableau .1.

	c_0	$c(x)$	$c(\rho)$	$c(\rho, x, t)$
0	3.1	3.2	3.3	
$f(\rho, x, t)$	3.1	3.2		

Table .1: Tableau des cas particuliers conduisant à des courbes caractéristiques parallèles ou droites

3.1 Cas particulier $c = c_0$

Dans le cas où $c(\rho, x, t) = c_0$ est une constante, l'équation d'advection s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \quad (22)$$

avec la condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ et le système dynamique s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= c_0 \\ \dot{\rho} &= f(\rho, x, t) \end{cases} \quad (23)$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$. On en déduit alors

$$x = X(a, t) = a + c_0 t \quad \text{et} \quad \dot{\rho} = f[\rho(t), a + c_0 t, t]. \quad (24)$$

Les caractéristiques \mathcal{C}_a sont donc des droites parallèles de pente $1/c_0$ dans le plan (x, t) .

Dans le cas très particulier $f = 0$, la quantité ρ est invariante le long de ces droites caractéristiques et l'on peut écrire $\rho^{(L)}(a, t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t) = \rho_0(a)$. On en déduit $\rho(x, t) = \rho_0(x - c_0 t)$ en utilisant la relation $a = A(x, t) = x - c_0 t$ qui inverse la relation $x = X(a, t) = a + c_0 t$. On vérifie alors que l'on a bien $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$. Dans le cadre de la méthode des caractéristiques, la quantité invariante ρ est appelée "invariant de Riemann".

Dans le cas général $f \neq 0$, la solution est $\rho(x, t) = \rho^{(L)}(x - c_0 t, t)$ où $\rho^{(L)}(a, t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ est obtenu en résolvant l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{\rho} = f[\rho(t), a + c_0 t, t]. \quad (25)$$

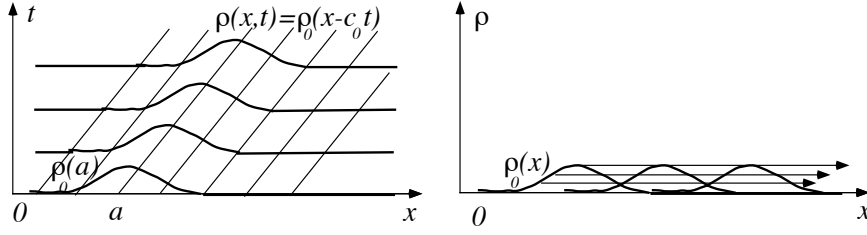


Figure 7: Droites caractéristiques dans le cas c_0 constant et solutions $\rho(x, t) = \rho_0(x - c_0 t)$ dans le cas $f = 0$.

Sauf dans des cas particuliers où l'on peut trouver une résolution analytique, il faut recourir à une méthode numérique (par exemple avec un schéma de Runge-Kutta) pour résoudre cette équation. Dans le cadre de la méthode des caractéristiques la quantité $\rho_{C_a}(t)$ ainsi trouvée est appelée “fonction de de Riemann”.

3.2 Cas particulier $c = c(x)$

Dans le cas où $c(\rho, x, t) = c(x)$ ne dépend ni du temps ni de la variable ρ , l'équation d'advection s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(x) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \quad (26)$$

avec la condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ et le système dynamique s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= c(x) \\ \dot{\rho} &= f(\rho, x, t) \end{cases} \quad (27)$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$.

S'il existe des points a_i pour lesquels $c(a_i) = 0$, il existe alors des droites caractéristiques \mathcal{C}_{a_i} d'équations $x = a_i$. Dans un intervalle ouvert délimités par ces points, la fonction $c(x)$ ne s'annule pas et on peut donc considérer la primitive de $1/c(x)$ définie par

$$\Theta(x) = \int_{x_*}^x \frac{1}{c(s)} ds, \quad (28)$$

où x_* est un point choisi au hasard dans cet intervalle. Cette primitive permet d'exprimer l'équation des courbes caractéristiques sous la forme

$$\Theta[x(t)] - \Theta(a) = t \quad \iff \quad x(t) = \Theta^{-1}[\Theta(a) + t], \quad (29)$$

où Θ^{-1} est l'inverse de la fonction Θ . Cet inverse existe sur l'intervalle considéré dans la mesure où sa dérivée $\frac{1}{c(x)}$ ne s'annule pas. On peut alors écrire

$$X(a, t) = \Theta^{-1} [\Theta(a) + t] \quad \Longleftrightarrow \quad A(x, t) = \Theta^{-1} [\Theta(x) - t] . \quad (30)$$

On remarque que les courbes caractéristique \mathcal{C}_a se déduisent les unes des autres par des translations en temps dans le plan (x, t) . En effet, on peut écrire $\Theta [x_2(t)] - \Theta [x_1(t)] = \Theta(a_2) - \Theta(a_1)$.

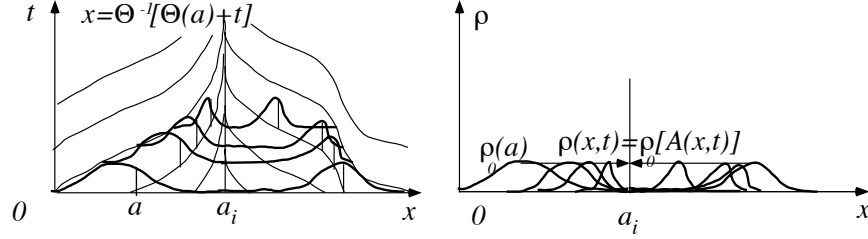


Figure 8: Courbes caractéristiques dans le cas $c(x)$ indépendant de t et de ρ et solution $\rho(x, t) = \rho[A(x, t)]$ dans le cas particulier $f = 0$.

Dans le cas très particulier $f = 0$, la quantité ρ est invariante le long des courbes caractéristiques (invariant de Riemann) et la solution s'écrit $\rho(x, t) = \rho_0[A(x, t)] = \rho_0 \{ \Theta^{-1} [\Theta(x) - t] \}$.

Dans le cas général $f \neq 0$, on a $\rho(x, t) = \rho^{(L)}[A(x, t), t]$ où $\rho^{(L)}(a, t) = \rho_{c_a}(t)$ est obtenu en résolvant l'équation :

$$\dot{\rho} = f [\rho(t), X(a, t), t] \quad (31)$$

avec $X(a, t) = \Theta^{-1} [\Theta(a) + t]$. La résolution de cette équation, comme le calcul et l'inversion de la fonction $\Theta(x)$, nécessitent, la plupart du temps, le recours à des méthodes numériques.

3.3 Cas particulier $c = c(\rho)$ et $f = 0$

Dans le cas où $c(\rho, x, t) = c(\rho)$ ne dépend ni du temps ni de l'espace mais seulement de la variable ρ et dans le cas très particulier où $f = 0$, l'équation d'advection s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (32)$$

avec la condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ et le système dynamique s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= c(\rho) \\ \dot{\rho} &= 0 \end{cases} \quad (33)$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$.

Le long des courbes caractéristiques \mathcal{C}_a d'équations $x = x(t)$ avec $x(t)$ solution du système pour $x(0) = a$, la quantité ρ est constante (invariant de Riemann) et égale à $\rho_0(a)$. On en déduit alors que ces caractéristiques sont des droites d'équation

$$x(t) = X(a, t) = a + c[\rho_0(a)] t . \quad (34)$$

Les intervalles en a pour lesquels la fonction $c[\rho_0(a)]$ croît avec a génèrent des droites caractéristiques qui ne se coupent pas pour $t > 0$. En revanche, ces caractéristiques se coupent si cette fonction est décroissante. Le mouvement 1D inverse $A(x, t)$ s'obtient en résolvant l'équation implicite

$$x = A(x, t) + c \{ \rho_0 [A(x, t)] \} . \quad (35)$$

Dans la région du plan (x, t) où les droites caractéristiques ne se coupent pas, cette équation implicite admet une solution unique. La solution de l'équation d'advection s'écrit alors $\rho(x, t) = \rho_0[A(x, t)]$. Dans la région du plan (x, t) où les droites caractéristiques se coupent, l'équation implicite conduit à plusieurs valeurs de a pour un couple (x, t) donné. Il n'est donc pas possible de définir une solution $\rho(x, t)$ monovaluée, sauf à ne considérer qu'une partie des caractéristiques. Ce choix ne peut se faire qu'en décrivant l'évolution d'un choc (discontinuité de ρ) dont la dynamique doit être décrite par une relation de saut venant compléter la modélisation continue de l'équation d'advection. De part et d'autre de la trajectoire $x = X_c(t)$ du choc, on peut alors considérer que la solution $A(x, t)$ est celle qui correspond aux caractéristiques reliant (x, t) à $(a, 0)$ sans couper cette trajectoire.

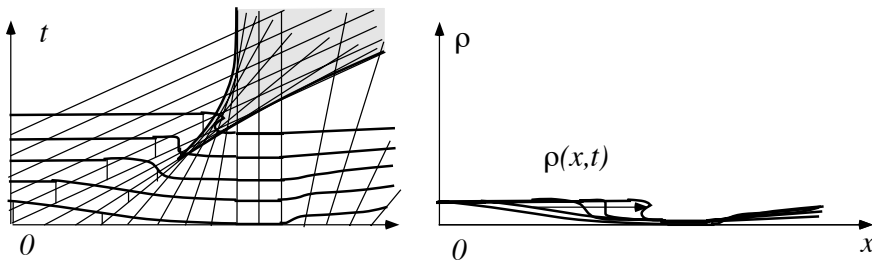


Figure 9: Droites caractéristiques dans le cas où $c(\rho)$ ne dépend que de ρ et dans le cas particulier $f = 0$. Solution $\rho(x, t) = \rho_0[A(x, t)]$.

4 Modèle simple du trafic routier

On présente ici un modèle de trafic routier dont la simplicité permet une bonne introduction des concepts de caractéristiques et de chocs. Ce modèle assimile le trafic routier à un fluide compressible 1D instationnaire. Nous allons voir que le modèle doit être défini par une équation de bilan global si l'on veut déterminer le comportement d'éventuels chocs. Cette équation de bilan global contient l'équation aux dérivées partielles (bilan local) mais aussi une relation de saut qui traite des discontinuités. Le concept de caractéristiques est particulièrement simple pour ce modèle et on montre comment calculer la vitesse de propagation d'un choc.

4.1 Du bilan global au bilan local

On considère que la fonction $\rho(x, t)$ est la densité d'automobile sur une route (nombre par unité de longueur) et on note $Q(\rho)$ le flux d'automobile supposé fonction (continue) de ρ uniquement. Pour fixer les idées, supposons que $V(\rho) = V_{\max} (1 - \rho^2/\rho_{\max}^2)$ modélise la vitesse des véhicules qui décroît avec la densité ρ du trafic. Le flux est alors $Q(\rho) = \rho V(\rho) = V_{\max} (\rho - \rho^3/\rho_{\max}^2)$. Il est maximal pour $\rho_* = \rho_{\max}/\sqrt{3} \sim 0.6 \rho_{\max}$.

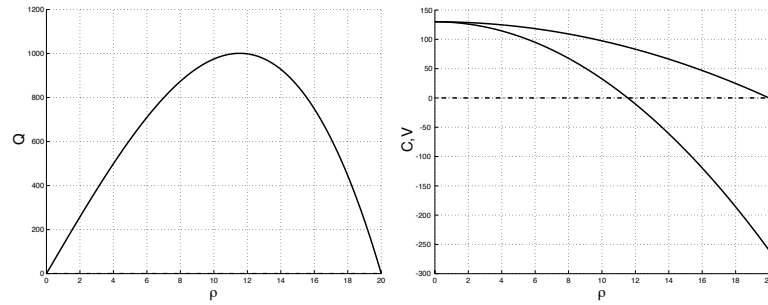


Figure 10: (a) Flux de véhicules $Q(\rho)$. (b) Vitesses des véhicules $V(\rho)$ et vitesse d'advection $C(\rho) = Q'(\rho)$ des fluctuations de la densité de véhicules ρ .

Le bilan global exprimant la conservation du nombre de véhicules s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho dx + [Q(\rho)]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (36)$$

pour tout intervalle fixe $[x_1, x_2]$, avec la notation $[f]_{x_1}^{x_2} = f(x_2) - f(x_1)$.

On en déduit facilement que les solutions $\rho(x, t)$ continues dérivables vérifient l'équation de "bilan local"

$$\partial_t \rho + \partial_x Q(\rho) = 0 \quad (37)$$

où ∂_t et ∂_x désignent respectivement les dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace.

On définit la vitesse $C(\rho) = Q'(\rho) = V_{\max} (1 - 3\rho^2/\rho_{\max}^2)$ et l'on écrit l'équation de bilan local sous la forme

$$\partial_t \rho + C(\rho) \partial_x \rho = 0 . \quad (38)$$

On voit alors que le long d'une courbe $x(t)$ définie par l'équation $\frac{dx}{dt}(t) = C\{\rho[x(t), t]\}$, plus simplement notée $\dot{x} = C(\rho)$, la grandeur $\rho[x(t), t]$ reste constante (vérification en reportant dans l'équation).

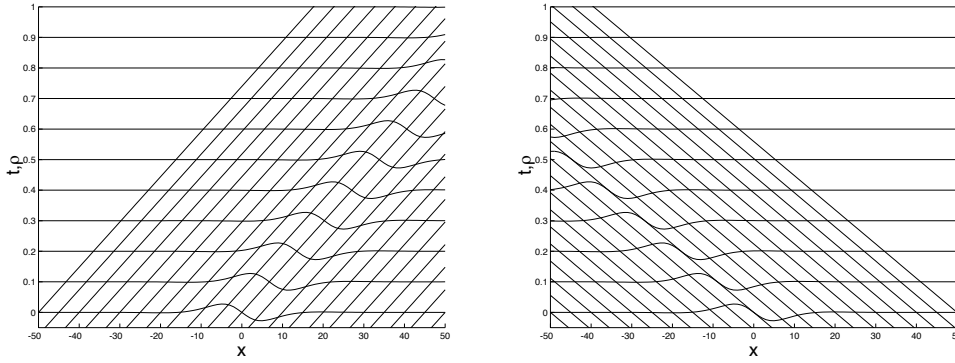


Figure 11: Propagation d'un coup de frein (a) $\rho_0 = 0.4 \rho_{\max} < \rho_*$ (b) $\rho_0 = 0.75 \rho_{\max} > \rho_*$.

On dit que les courbes définies par $\dot{x} = C(\rho)$ dans l'espace (x, t) sont les “caractéristiques” de l'équation de bilan et que “l'invariant de Riemann” le long d'une telle caractéristique est la grandeur ρ . Pour cet exemple particulier d'équation, les caractéristiques sont toujours des droites. En effet, comme ρ est constant le long d'une caractéristique, $C(\rho)$ l'est aussi.

La linéarisation $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ de l'équation de bilan local autour de l'état de base $\rho = \rho_0$ conduit ($\tilde{\rho}$ petit devant ρ_0) à l'équation

$$\partial_t \tilde{\rho} + C(\rho_0) \partial_x \tilde{\rho} = 0 \quad (39)$$

La relation de (non-)dispersion $\omega = C(\rho_0) k$ met en évidence des ondes (en notation complexe) $\tilde{\rho} = \rho_m \exp(ikx - i\omega t)$ qui se propagent à la vitesse $C(\rho_0)$.

On peut donc voir les caractéristiques comme des rayons dont la vitesse prend en compte les variations de ρ dans le cas où les termes non-linéaires ne peuvent plus être négligés.

4.2 Ondes de détente et méthode des caractéristiques

Pour fixer les idées, on suppose que $C(\rho)$ est une fonction monotone décroissante de ρ comme dans l'exemple particulier considéré.

On considère une condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ telle que $\rho_0(x) = \rho_g$ pour $x \leq x_g$ (Gauche) et $\rho_0(x) = \rho_d$ pour $x \geq x_d$ (Droite). Dans l'intervalle $[x_g, x_d]$, on suppose que $\rho_0(x)$ relie continuellement de façon monotone les valeurs ρ_g et ρ_d .

On suppose $\rho_g > \rho_d$: la circulation devient donc de plus en plus fluide. Les deux hypothèses entraînent que la fonction $C_0(x) = C[\rho_0(x)]$ est strictement décroissante.

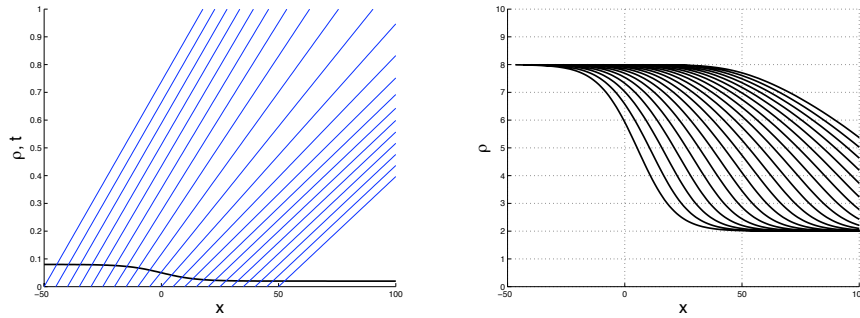


Figure 12: Onde de détente $\frac{\rho_g}{\rho_{\max}} = 0.75$ et $\frac{\rho_d}{\rho_{\max}} = 0.4$. a) Condition initiale est droites caractéristiques. b) Solution $\rho(x, t)$ à des instants successifs.

Une représentation graphique (figure 12) du calcul de la solution $\rho(x, t)$ issue de la condition initiale $\rho_0(x)$ est obtenue en traçant toutes les caractéristiques dans le plan (x, t) . A gauche du plan se trouvent les caractéristiques d'équations $x = a + C(\rho_g)t$ avec $a \leq x_g$ tandis que l'on trouve à droite les caractéristiques d'équation $x = a + C(\rho_d)t$ avec $a \geq x_d$. Entre ces deux familles se trouvent les droites d'équation $x = a + C[\rho_0(a)]t$ avec $a \in [x_g, x_d]$. Aucune de ces droites ne se coupent du fait que $C_0(x)$ est croissante. On dit que l'on est en présence d'une onde de détente.

Dans la limite où $x_g = x_d = 0$, la condition initiale $\rho_0(x)$ est discontinue. La solution $\rho(x, t)$ est cependant continue, et s'obtient en traçant un faisceau de droites caractéristiques centrées en $(x, t) = (0, 0)$. On dit que l'on est en présence d'une onde de détente centrée.

4.3 Ondes de compression et relation de saut

On suppose maintenant que $\rho_g < \rho_d$: la circulation devient donc de moins en moins fluide. La fonction $C_0(x) = C[\rho_0(x)]$ est alors strictement décroissante. Pour les temps courts, le calcul de la solution $\rho(x, t)$ s'effectue comme précédemment en traçant les caractéristiques. Mais ces droites se coupent (figure 13). Leur enveloppe décrit deux courbes entre lesquelles est comprise la trajectoire d'un choc.

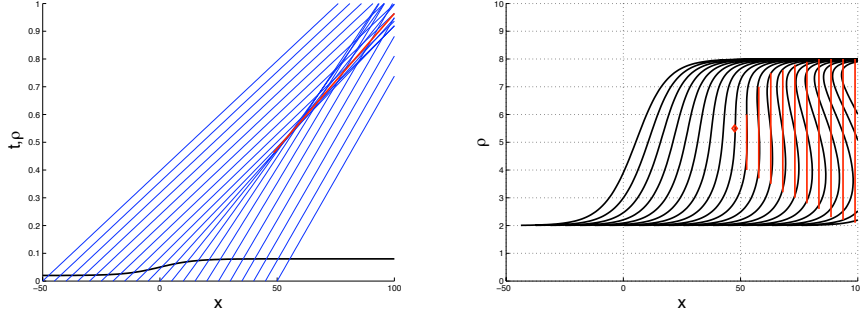


Figure 13: Formation d'un choc $\frac{\rho_g}{\rho_{\max}} = 0.4$ et $\frac{\rho_d}{\rho_{\max}} = 0.75$.

a) Condition initiale est droites caractéristiques. b) Solution $\rho(x, t)$ à des instants successifs.

Pour calculer la vitesse de ce choc, il faut considérer l'équation de bilan global qui s'applique à des fonctions $\rho(x, t)$ admettant une discontinuité en un point mobile $x_c(t)$ animé d'une vitesse $w = \dot{x}_c$. On note alors $[[\rho]] = \rho_D - \rho_G$ le saut entre les valeurs situées à droite $\rho_D(t)$ et à gauche $\rho_G(t)$ du choc.

On montre alors que la solution discontinue $\rho(x, t)$ vérifie la relation de saut

$$-w[[\rho]] + [[Q(\rho)]] = 0. \quad (40)$$

En effet, la formule de Leibnitz permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx &= \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{x_c^-(t)} \rho \, dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \rho \, dx \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \partial_t \rho \, dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \partial_t \rho \, dx + \dot{x}_c(t) \rho_G(t) - \dot{x}_c(t) \rho_D(t) \\ &= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \partial_t \rho \, dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \partial_t \rho \, dx - w [[\rho]]. \end{aligned} \quad (41)$$

D'autre part, on peut écrire

$$[Q]_{x_1}^{x_2} = Q[\rho(x_2, t)] - Q[\rho(x_1, t)]$$

$$\begin{aligned}
&= [Q]_{x_1}^{x_c^-} + [Q]_{x_c^+}^{x_2} - Q[\rho_G(t)] + Q[\rho_D(t)] \\
&= [Q]_{x_1}^{x_c^-} + [Q]_{x_c^+}^{x_2} + \llbracket Q \rrbracket .
\end{aligned} \tag{42}$$

En sommant les équations (41) et (42) et en appliquant le bilan global (52) sur les intervalles $[x_1, x_c[$ et $]x_c, x_2]$ on trouve bien que la vitesse du choc est

$$w = \frac{\llbracket Q(\rho) \rrbracket}{\llbracket \rho \rrbracket} , \tag{43}$$

les valeurs de part et d'autre du choc étant connues grâce aux caractéristiques.

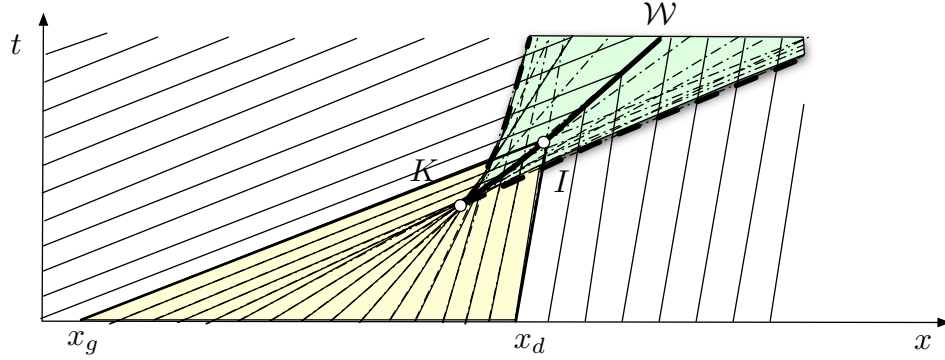


Figure 14: Trajectoire \mathcal{W} d'équation $x = x_c(t)$ du choc. Naissance du choc en K de coordonnées (x_K, t_K) . A partir du point I de coordonnées (x_I, t_I) , la vitesse du $w = \dot{x}_c(t)$ est constante.

Pour l'exemple particulier considéré, on note K le point (x_K, t_K) à partir duquel le choc prend naissance, et $x = x_c(t)$ pour $t \geq t_K$ l'équation de sa trajectoire \mathcal{W} . Dans la mesure où $\rho_0(x) = \rho_g$ pour $x \leq x_g$ et $\rho_0(x) = \rho_d$ pour $x \geq x_d$ sont constants à l'extérieur de l'intervalle $[x_g, x_d]$, on voit qu'à partir du point I situé à l'intersection des droites $x = x_g + c(\rho_g)t$ et $x = x_d + c(\rho_d)t$, ce qui définit ses coordonnées (x_I, t_I) , le choc est animé d'une vitesse constante

$$w = \frac{Q(\rho_D) - Q(\rho_G)}{\rho_D - \rho_G} = \frac{Q(\rho_d) - Q(\rho_g)}{\rho_d - \rho_g} . \tag{44}$$

En effet, après le temps t_I , les points (x, t) de la trajectoire \mathcal{W} du choc sont à l'intersection d'une caractéristique $x = a_g + C(\rho_g)t$ avec $a_g < x_d$ provenant de la région uniforme de gauche et d'une caractéristique $x = a_d + C(\rho_d)t$ avec $x_d < a_d$ provenant de la région uniforme de droite. On a donc $(\rho_G, \rho_D) = (\rho_g, \rho_d)$

La forme de la trajectoire du choc \mathcal{W} entre les points K et I dépend de la forme de la fonction $\rho_0(x)$ dans l'intervalle $[x_g, x_d]$.

Lorsque $x_g = x_d = 0$, on voit que $x_I = 0$ et $t_I = 0$. On est alors en présence d'un "choc centrée" animé de la vitesse constante $w = \frac{Q(\rho_d) - Q(\rho_g)}{\rho_d - \rho_g}$.

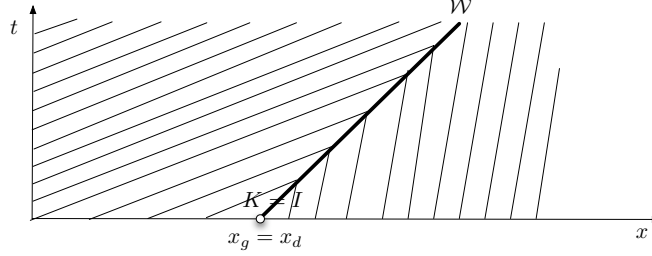


Figure 15: Cas du choc centré : $x_g = x_I = x_K = x_d$. La trajectoire \mathcal{W} du choc est la droite d'équation $x = x_c(t) = x_K + w t$.

Conclusion

Nous avons montré que la résolution de l'équation aux dérivées partielles suivante, appelée équation d'advection :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + c[\rho(x, t), x, t] \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) = f[\rho(x, t), x, t] \quad (45)$$

avec la condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ ou $\rho_{\mathcal{L}}(s)$ connu sur une courbe \mathcal{L} d'équation $x = x_{\mathcal{L}}(s)$, se ramenait à la résolution du système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = c(\rho, x, t) \\ \dot{\rho} = f(\rho, x, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{q} = c(p, q, t) \\ \dot{p} = f(p, q, t) \end{cases} \quad (46)$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$ ou, le long d'une courbe \mathcal{L} , la condition $[x(s), \rho(s)] = [x_{\mathcal{L}}(s), \rho_{\mathcal{L}}(s)]$. Cette équivalence a été obtenue en remarquant que l'équation d'advection s'écrivait sous la forme de la dérivée $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(t) = f[\rho, x_{\mathcal{C}}(t), t]$ le long des courbes caractéristiques \mathcal{C} d'équation $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ et définies par $\dot{x} = c(\rho, x, t)$.

Dans le cas général, la détermination de ces courbes caractéristiques doit être couplée à celle de la solution $\rho(x, t)$. On peut interpréter cette méthode des caractéristiques en disant que ces courbes \mathcal{C} "propagent l'information" contenue dans ρ . Lorsque $f = 0$, la grandeur ρ reste constante le long des caractéristique et est alors qualifiée "d'invariant de Riemann". Dans le cas général $f \neq 0$, cette grandeur est une "fonction de Riemann" et se calcule en résolvant l'équation différentielle $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f$.

La complexité des notations nécessaires pour présenter cette méthode peut être surmontée en remarquant que les courbes caractéristiques sont les trajectoires d'un mouvement 1D d'équation $x = X(a, t)$ dont la vitesse est $c[\rho(x, t), x, t]$ où $\rho(x, t)$ est la solution de l'équation d'advection. Une autre interprétation peut être suggérée à l'aide d'un mouvement, 2D cette fois, défini par le champ de vitesse $\underline{U}(q, p, t) = [c(p, q, t), f(p, q, t)]$ dans "l'espace des phases" (q, p) . Les trajectoires de ce mouvement sont les solutions du système dynamique auquel on a réduit l'équation aux dérivées partielles.

Toujours pour comprendre la complexité des notations, il est utile d'interpréter la méthode des caractéristiques à l'aide du changement de variables $(a, \tau) = [A(x, t), t]$ équivalent à $(x, t) = [X(a, \tau), \tau]$ qui permet de transformer l'équation d'advection en un système plus simple. Dans le plan (x, t) , ce changement de variable revient à passer d'un système de coordonnées cartésienne à un système de coordonnées curvilignes défini par les parallèles à l'axe des x (iso- τ) et les courbes caractéristiques (iso- a).

Plusieurs cas particuliers ont été examinés. Lorsque c_0 est une constante, les caractéristiques sont des droites parallèles. Lorsque $c(x)$ ne dépend que de x , les courbes caractéristiques se déduisent les unes des autres par une translation en temps. Ces deux cas appartiennent au cas linéaire où $c(x, t)$ ne dépend pas de ρ (on dit parfois quasi-linéaire lorsque c n'est pas constant). Dans ce cas, la superposition de deux solutions de l'équation d'advection (hors conditions initiales) est une nouvelle solution. Le cas où $c(\rho)$ ne dépend pas de x et de t est non linéaire et conduit à des caractéristiques qui sont des droites pas forcément parallèles. Cette situation permet de mettre facilement en évidence les limites de la méthode des caractéristiques qui n'est plus valable lorsque les caractéristiques se coupent.

Enfin, on peut généraliser toute cette étude au cas du système d'équations d'advection

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + c_i(\underline{\rho}, x, t) \frac{\partial \rho_i}{\partial x} = f_i(\underline{\rho}, x, t) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (47)$$

où $\underline{\rho} \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur $\underline{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$ à N composantes. Si toutes les fonctions $\rho_j(x, t)$ sauf une sont connues, il suffit de résoudre la fonction inconnue $\rho_i(x, t)$ en calculant les courbes caractéristiques \mathcal{C}_i associée à son équation d'advection et en utilisant des conditions initiales ou des conditions spécifiées sur une courbe \mathcal{L} . Pour résoudre simultanément toutes fonctions $\rho_i(x, t)$, il faut considérer les N familles de courbes caractéristiques \mathcal{C}_i pour $i = 1, \dots, N$ est propager N conditions à partir d'une ou plusieurs courbes \mathcal{L} ou conditions initiales.

On voit alors que la résolution de ce système d'équations aux dérivées partielles couplées se ramène à la résolution du système dynamique à $2N$ degrés

de liberté

$$\begin{cases} \dot{x}_i = c_i(\underline{\rho}, x_i, t) \\ \dot{\rho}_i = f_i(\underline{\rho}, x_i, t) \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \ . \quad (48)$$

La méthode des caractéristiques pour résoudre un système équations aux dérivées partielles en (x, t) consiste à essayer de combiner les équations pour les mettre sous la forme (47). Lorsque cela est possible, on dit que le système est hyperbolique.

FORMULAIRE**DÉRIVÉE LE LONG DE COURBES****Dérivée d'un champ le long d'une courbe :**

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{C}}(t) = c_{\mathcal{C}}(t) \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_{\mathcal{C}}(t) \frac{\partial}{\partial x}\right] \rho[x_{\mathcal{C}}(t), t]$$

Famille de courbes $x_{\mathcal{L}_a}(t) = X(a, t)$ et mouvement 1D :

$$\rho^{(L)}(a, t) = \rho_{\mathcal{L}_a}(t) = \rho[X(a, t), t] \quad \iff \quad \rho(x, t) = \rho^{(L)}[A(x, t), t]$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION D'ADVECTION**Équation d'advection :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \quad \text{avec} \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x)$$

Système dynamique équivalent :

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = c(\rho, x, t) \\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f(\rho, x, t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad [x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$$

Changement de variable :

$$\begin{cases} da = dx - c dt \\ d\tau = dt \end{cases} \iff \begin{cases} a = A(x, t) \\ \tau = t \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \tau} \end{cases}$$

Résumé de la méthode des caractéristiques :

$$\frac{d\rho}{dt} = f(\rho, x, t) \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = c(\rho, x, t).$$

CAS PARTICULIERS DE RÉOLUTION DE $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = f$

Cas $c = c_0$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_c = f(\rho, a + c_0 t, t) \quad \text{sur la droite } \mathcal{C} \text{ d'équation } x = a + c_0 t .$$

Cas $c = c(x)$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_c = f[\rho, X(a, t), t] \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation } x = X(a, t)$$

avec $X(a, t) = \Theta^{-1}[\Theta(a) + t]$ et $\Theta(x) = \int_{x_*}^x \frac{1}{c(s)} ds$

Cas $c = c(\rho)$ et $f = 0$

$$\rho(x, t) = \rho_0(a) \quad \text{sur la droite } \mathcal{C} \text{ d'équation } x = a + \rho_0(a) t .$$

MODÈLE DE TRAFIC ROUTIER

Bilan global

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho dx + [Q(\rho)]_{x_1}^{x_2} = 0$$

Bilan local / relation de saut

$$\partial_t \rho + \partial_x Q(\rho) = 0 \quad \text{et} \quad -w[[\rho]] + [[Q(\rho)]] = 0 .$$

Vitesse d'un choc

$$w = \frac{Q(\rho_D) - Q(\rho_G)}{\rho_D - \rho_G} = \frac{[[Q(\rho)]]}{[[\rho]]}$$

QUESTIONNAIRES À CHOIX MULTIPLES

QCM 1.1 Dérivée le long de courbes

1) La courbe suivante est à vitesse bornée :

A \mathcal{L} d'équation $t = 0$

B \mathcal{L} d'équation $x - |v|t - \gamma^2 x^3 = 0$

C \mathcal{L} d'équation $x - |v|t + \beta^2 t^3 = 0$

- 2) La dérivée de $\rho(x, t) = \beta t x^2$ le long de la courbe \mathcal{L} d'équation $x_{\mathcal{L}}(t) = a + \frac{1}{2}\gamma t^2$ est :

A $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \beta x^2$

B $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \beta x(x + 2\gamma t^2)$

C $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = 0$

QCM 1.2 Résolution de l'équation d'advection

- 1) L'équation d'advection $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma t \frac{\partial \rho}{\partial x} = \beta x^2$ est équivalente au système dynamique :

A $\dot{x} = \gamma t$ et $\dot{\rho} = \beta x^2(1 + 2\gamma t^2)$

B $\dot{x} = \gamma t$ et $\dot{\rho} = \beta x^2$

C $\dot{x} = \gamma t$ et $\dot{\rho} = 0$

- 2) Le changement de variable $da = dx - \gamma t dt$ et $d\tau = dt$ conduit à :

A $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \gamma t \frac{\partial}{\partial a}$

B $\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - \gamma t \frac{\partial}{\partial x}$

C $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$

QCM 1.3 Résolution de cas particuliers

- 1) Les caractéristiques de l'équation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \beta x^2$ sont

A Des courbes parallèles à pente variable

B Des droites parallèles

C Des droites non parallèles

- 2) Les caractéristiques de l'équation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \beta x \frac{\partial \rho}{\partial x} = \gamma t^2$ sont

A Des courbes parallèles à pente variable

B Des droites parallèles

C Des droites non parallèles

- 3) Les caractéristiques de l'équation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ avec la condition initiale $\rho(x, 0) = \beta x^2$ sont

A Des courbes parallèles à pente variable

B Des droites parallèles

C Des droites non parallèles

CORRIGÉS DES QCM

Réponses 1.1 Dérivée le long de courbes

1)C 2)B

Réponses 1.2 Résolution de l'équation d'advection

1)B 2)A

Réponses 1.3 Résolution de cas particuliers

1)B 2)A 3)C

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 1.1 Onde de crue de faible amplitude

On considère le modèle suivant pour une onde de crue de faible amplitude :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{3}{2} U(x) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad U(x) = \frac{U_0}{1 + \lambda x} \quad (49)$$

où $\tilde{h}(x, t)$ est la perturbation d'un profil d'équilibre de hauteur d'eau que l'on suppose associé au profil de vitesse $U(x)$ avec $U_0 > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que le domaine étudié est la demi-droite $x \geq 0$.

- 1) Donner l'expression des courbes caractéristiques de cette équation. Tracer ces courbes dans le quart de plan (x, t) avec $x \geq 0$ et $t \geq 0$.
- 2) Montrer que la distance $L(t) = x_2(t) - x_1(t)$ entre deux trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ décrivant deux courbes caractéristiques tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

On considère la condition aux limites $\tilde{h}(0, t) = \tilde{h}_*$ pour $t \geq 0$.

- 3) Indiquer la région du quart de plan (x, t) pour laquelle la solution peut être déterminée par la donnée de cette condition aux limites et tracer la partie connue du profil de crue $h(x, t)$ à des instants successifs.

On considère la condition initiale $\tilde{h}(x, 0) = \tilde{h}_* [1 - \tanh(x/L_0)]$ pour $x \geq 0$ avec $\tilde{h}_* \geq 0$ et $L_0 > 0$.

- 4) Montrer que l'on peut à présent déterminer la solution sur tout le quart de plan (x, t) et tracer schématiquement le profil de crue $h(x, t)$ à des instants successifs.

Corrigé page 34

EXERCICE 1.2 Pluie et ondes de crue

On considère une portion de rivière de longueur L drainant un bassin versant soumis à une pluie uniforme représentée par une fonction $P(t)$. On suppose que la hauteur d'eau $h(x, t)$ de la rivière est régie par le modèle

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_0 \frac{\partial h}{\partial x} = P \quad (50)$$

où U_0 est une constante positive. On suppose que la hauteur d'eau en amont est constante et donnée par la condition aux limites $h(0, t) = h_0$. On s'intéresse alors à la hauteur d'eau $h_e(t) = h(L, t)$ en aval de la portion de rivière en fonction du régime de pluie $P(t)$.

- 1) Calculer et tracer la solution stationnaire $h(x, t) = h_s(x)$ obtenue pour une pluie constante $P(t) = P_0$. On pourra noter $\gamma = P_0/U_0$.
- 2) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le profil de hauteur d'eau est la solution stationnaire $h(x, 0) = h_s(x)$ pour $x \in [0, L]$. On suppose que l'intensité de pluie est nulle pour $t \geq 0$. Montrer que $h_e(t) = h_0$ pour $t \geq T$ avec $T = L/U_0$.
- 3) Tracer dans le plan (x, t) le lieu des points pour lesquels l'écoulement est uniforme.
- 4) Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $h_e(t)$ en fonction du temps.
- 5) Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $h(x, t)$.
- 6) On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t = 0$ la hauteur d'eau est uniforme et égale à $h(x, 0) = h_0$ pour $x \in [0, L]$. On suppose une intensité de pluie constante $P(t) = P_0$ pour $t \geq 0$. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $h_e(t)$ en fonction du temps.
- 7) Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $h(x, t)$.

Corrigé page 36

PROBLÈME 1.3 Modèle de crues rapides

En l'absence de pluie et d'infiltration dans le sol, la loi de conservation de la masse du ruissellement des eaux à la surface d'un plan incliné s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) = 0 \quad (51)$$

où $h(x, t)$ est la hauteur de la lame d'eau et $U(x, t)$ sa vitesse moyenne.

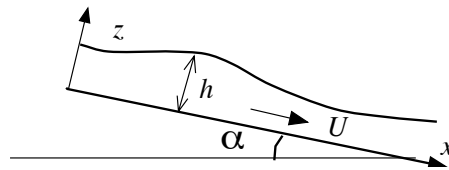


Figure 16: Ruissellement d'une lame d'eau de hauteur h et de vitesse U sur une pente faisant un angle α avec l'horizontale.

Tracé qualitatif d'un hydrogramme

On modélise le ruissellement le long du plan incliné par la loi :

$$U = K \sqrt{I} h^{\frac{2}{3}} \quad (52)$$

où h est la hauteur de la lame d'eau ruissellante, U sa vitesse moyennée sur la verticale et $I = \sin \alpha$ la "pente". Le coefficient de "Strickler" K dépend du type de sol sur lequel s'effectue le ruissellement. On suppose ici qu'il est constant.

- 1) Une valeur du coefficient de Strickler sur un sol de type "prairie" est $K = 10$ en unités SI. Préciser cette unité en donnant la dimension de K .
- 2) Exprimer la loi de conservation de la masse en remplaçant U par son expression en fonction de $h(x, t)$.
- 3) On suppose qu'à $t = 0$ le profil de la surface libre $x \in [0, L]$ est égal à

$$h(x, 0) = h_0(x) = h_* [1 - \cos(kx)] \quad \text{avec} \quad k = \frac{\pi}{L} \quad (53)$$

Dessiner cette condition initiale et l'interpréter physiquement en invoquant le régime des précipitations qui aurait pu précéder l'établissement d'une telle nappe d'eau de ruissellement.

- 4) Donner l'équation des courbes caractéristiques associées à cette condition initiale.
- 5) Sans faire de calculs, dessiner les profils $h(x, t)$ pour différents temps t_i positifs, en supposant que l'on a $h(0, t) = 0$ pour $t \geq 0$.
- 6) En déduire, toujours sans calcul, le tracé de l'hydrogramme $h(L, t)$ au bas de la pente.

Tracé quantitatif d'un hydrogramme

On considère le modèle de ruissellement

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(h^{\frac{5}{3}} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \beta > 0 \quad (54)$$

et la condition aux limites $h(0, t) = 0$ pour $t \geq 0$. On considère la condition initiale $h(x, 0) = h_0(x)$ qui s'écrit

$$h_0(a) = h_* \left(\frac{a}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pour } a \in [0, l] \quad \text{et} \quad h_0(a) = h_* \quad \text{pour } a \in [l, L].$$

- 7) Donner l'équation des caractéristiques associées à cette condition initiale.
- 8) Calculer analytiquement la solution $h(x, t)$ pour $t \geq 0$.
- 9) Tracer la solution $h(x, t)$ pour des instants successifs t_i positifs.
- 10) En déduire l'hydrogramme $h(L, t)$ au bas de la pente et le tracer schématiquement.

Ruissellement en présence de pluie

On considère le modèle de ruissellement dans un bassin versant en présence de pluie décrit par l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{5}{3} U(h) \frac{\partial h}{\partial x} = P(t) \quad \text{avec} \quad U(h) = K \sqrt{I} h^{\frac{2}{3}} \quad (55)$$

et la condition aux limites $h(0, t) = 0$ pour $t \geq 0$. Le coefficient de Strickler K et la pente $I = \sin \alpha$ sont supposés constants. La fonction $P(t)$ modélise une pluie que l'on suppose homogène sur l'ensemble du bassin versant. On suppose que le sol est initialement sec, ce que l'on traduit par la condition initiale $h(x, 0) = 0$.

Dans un premier temps, on suppose que $P(t) = P_0$ est constant.

- 11) Calculer l'équation des caractéristiques du modèle issues des points $(x, t) = (a, 0)$ pour $a \in [0, L]$.
- 12) Calculer l'équation des caractéristiques issue des points $(x, t) = (0, \tau)$ pour $\tau \geq 0$.

- 13) Tracer toutes les courbes caractéristiques du modèle dans la région $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}_+$.
 - 14) Calculer l'intersection de la courbe caractéristique issue du point $(x, t) = (0, 0)$ avec la droite d'équation $x = L$.
 - 15) En déduire le temps t_* au-delà duquel l'hydrogramme $h(L, t)$ devient constant.
 - 16) Calculer l'expression de cette valeur constante h_* .
 - 17) Calculer numériquement, même de manière très grossière, les valeurs de t_* , en nombre de jours, et de h_* , en mm, pour une pluie P_0 de 1 mm par jour, une longueur L de 10 km, une pente $I = 0,1$ et un nombre de Strickler de $K = 10$ en unité SI.
 - 18) Exprimer et tracer l'hydrogramme de crue $h(L, t)$ au bas de la pente.
- On suppose maintenant que $P(t) = P_0$ pour $t \in [0, t_0]$ et $P(t) = 0$ pour $t \geq t_0$ avec $t_0 \geq L^{\frac{3}{5}} K^{-\frac{3}{5}} I^{-\frac{3}{10}} P_0^{-\frac{2}{5}}$.
- 19) Tracer l'hydrogramme de crue associé à cette pluie.

Corrigé page 36

EXERCICE 1.4

 Modèles de l'équation de Burgers

On considère le modèle décrit par la fonction $u(x, t)$ continue ou discontinue tel que pour tout intervalle fixe $[x_1, x_2]$ on puisse écrire

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u \, dx + \frac{1}{2} [u^2]_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (56)$$

- 1) Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle.
- 2) Calculer la vitesse $w(t) = \dot{x}_c(t)$ d'un choc séparant une région uniforme $u(x, t) = u_1$ pour $x < x_c(t)$ d'une région uniforme $u(x, t) = u_2$ pour $x > x_c(t)$.
- 3) Répondre aux deux questions précédentes en considérant le nouveau modèle régi par l'équation $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u^2 \, dx + \frac{2}{3} [u^3]_{x_1}^{x_2} = 0$. On suppose ici que $u_1 + u_2 \neq 0$.
- 4) Comparer les deux modèles précédents.

On considère un troisième modèle tel que pour tout intervalle mobile $[x_1(t), x_2(t)]$ vérifiant $\dot{x}_1(t) = u[x_1(t), t]$ et $\dot{x}_2(t) = u[x_2(t), t]$ on puisse écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u(x, t) \, dx \right) - \frac{1}{2} [u^2]_{x_1(t)}^{x_2(t)} = 0. \quad (57)$$

- 5) Appliquer la formule de Leibnitz pour dériver l'intégrale par rapport au temps en supposant que $u(x, t)$ est continue. En déduire le bilan local.

- 6) Appliquer la formule de Leibnitz pour dériver l'intégrale par rapport au temps en supposant que $u(x, t)$ admet une discontinuité en un point $x_c(t)$ mobile de vitesse $w(t) = \dot{x}_c(t)$.
- 7) Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle. Comparer ce troisième modèle avec les deux précédents.

Corrigé page 39

EXERCICE 1.5 Ondes de crues non linéaires

On considère l'écoulement d'une lame d'eau d'épaisseur $h(x, t)$ et de vitesse moyenne $U(x, t)$ sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

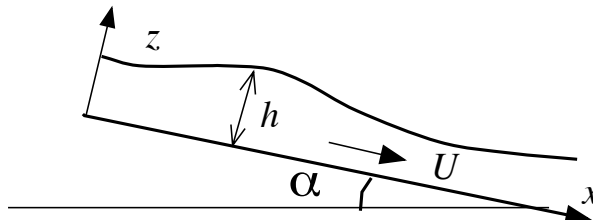


Figure 17: Écoulement d'une lame d'eau de hauteur h et de vitesse U sur un pan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

On suppose que cet écoulement à surface libre est régi par le modèle suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (U h)}{\partial x} = 0, \quad 0 = g \sin \alpha - \frac{C_f U |U|}{2 h} \quad (58)$$

où g est la gravité et C_f est un coefficient de frottement constant. On suppose que la vitesse moyenne $U(x, t)$ reste toujours positive.

- 1) Quelles lois de conservation décrivent les équations du modèle et quelles approximations ont été utilisées.
- 2) Montrer que l'on peut éliminer U pour ne conserver qu'une équation en h que l'on écrira.
- 3) En invoquant les lois de conservation de la mécanique dont découlent le modèle, montrer que la formulation intégrale de la loi de conservation de la grandeur $\int_a^b h(x, t) dx$ s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_a^b h(x, t) dx + \kappa h^{\frac{3}{2}}(b, t) - \kappa h^{\frac{3}{2}}(a, t) = 0 \quad (59)$$

pour tout intervalle fixe $[a, b]$ pris sur l'axe des x .

- 4) Montrer que l'on peut déduire l'équation aux dérivées partielles de la question précédent à partir de cette formulation intégrale. La réciproque est-

elle vraie ? Quelle équation manque-t-il pour remonter à la formulation intégrale ?

On suppose que $\kappa = 1 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$ et on considère la condition initiale $h(x, 0) = h_0 + \frac{1}{2}\Delta h [1 - \tanh(kx)]$ avec $h_0 = 1 \text{ m}$, $\Delta h = 1.25 \text{ m}$ et $k = 10^{-1} \text{ km}^{-1}$.

- 5) Écrire les équations des courbes caractéristiques. Tracer sommairement ces courbes dans le demi-plan plan (x, t) avec $t \geq 0$.
- 6) Donner l'expression de l'invariant de Riemman et tracer sommairement les profils de cette grosse crue à différents instants représentatifs de son évolution. Indiquer comment varie l'extension spatiale du profil de crue.
- 7) Calculer la valeur numérique de la vitesse de propagation du ressaut longtemps après sa formation lorsque sa hauteur est proche de Δh .
- 8) Commenter la pertinence de ce modèle pour décrire certains phénomènes dévastateurs observés dans la nature.

Corrigé page 40

CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 1.1 Ondes de crue de faible amplitude

1) Les courbes caractéristiques sont définies par $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}U(x) = \frac{3}{2}U_0/(1 + \lambda x)$ ce qui s'intègre en $(1 + \frac{\lambda}{2}x)x - \frac{3}{2}U_0 t = C$ où C est une constante arbitraire.

Dans le plan (x, t) , ces courbes forment la famille des paraboles $t = \alpha x_1^2 + \beta x + C$ avec $\alpha = \frac{\lambda}{3U_0}$, $\beta = \frac{2}{3U_0}$ et C quelconque. **2)** Les équations des deux trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrivent respectivement $t = \alpha x_1^2 + \beta x_1 + C_1$ et $t = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + C_2$. On en déduit $\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = C_2 - C_1$ et donc $L(t) = x_2(t) - x_1(t) = \frac{C_1 - C_2}{\alpha[x_2(t) + x_1(t)] + \beta}$. Comme $x_1(t)$ et $x_2(t)$ tendent vers l'infini lorsque t tend vers l'infini, on voit que $L(t)$ tend vers zéro.

3) Le domaine d'influence issu de la demi-droite Ot est située à gauche de la courbe caractéristique $x_0(t)$ issue du point $(0, 0)$, c'est-à-dire la parabole d'équation $t = \alpha x^2 + \beta x$. On a $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_*$ pour $t \geq 0$ et $0 \leq x_0(t)$. **4)** Étant donné un point (x, t) situé à droite de la courbe $x_0(t)$, l'équation $t = \alpha x^2 + \beta x - (\alpha a^2 + \beta a)$ est celle de la courbe caractéristique qui passe par le point $(a, 0)$ de la demi-droite Ox avec $a = A(x, t) = \frac{\beta}{2\alpha} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{\beta^2}x^2 + \frac{4\alpha}{\beta}x - \frac{4\alpha t}{\beta^2}} \right]$. La solution dans le domaine d'influence de la condition initiale s'écrit alors $h(x, t) = h_i[A(x, t)] = \tilde{h}_* \{1 - \tanh[A(x, t)/L_0]\}$. Par un raisonnement géométrique en suivant les courbes caractéristiques (ou par une étude de du sens de variation des fonctions), on voit que le profil $\tilde{h}(x, t)$ décroît entre $x_0(t)$ et l'infini de la valeur \tilde{h}_0 à la valeur zéro. Ce profil est advecté vers l'aval, les valeurs de \tilde{h} restant

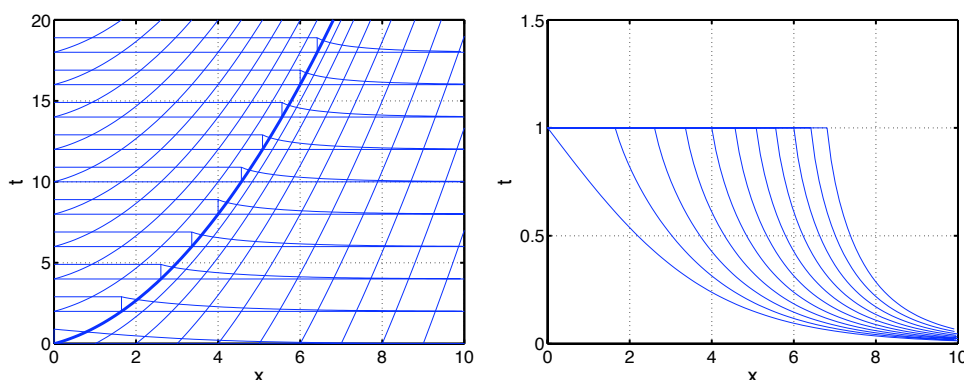


Figure 18: a) Courbes caractéristiques et profils $\tilde{h}(x, t)$. b) Profils seuls.

constantes le long des courbes caractéristiques. Son échelle de longueur caractéristique tend vers zéro.

Corrigé 1.2 Pluie et ondes de crue

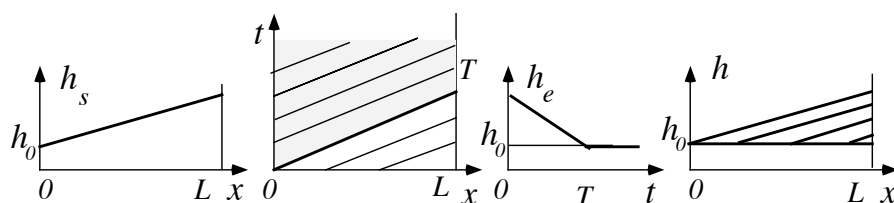


Figure 19: Vidange de la rivière a) $h_s(x)$, b) Région uniforme et droites caractéristiques, c) $h_e(t)$, d) $h(x, t)$.

1) La solution de l'équation $U_0 h'_s(x) = P_0$ avec la condition $h_s(0) = h_0$ est $h_s(x) = h_0 + \gamma x$ avec $\gamma = P_0/U_0$. Le profil $h_s(x)$ est linéaire. **2)** Les caractéristiques de ce modèle sont des droites d'équation $x = a + U_0 t$ si a désigne l'abscisse de l'intersection avec l'intervalle $[0, L]$ de l'axe des x ou $x = U_0(t - \tau)$ si τ désigne l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des t . Les droites caractéristiques issues du demi-axe des temps $t \geq 0$ coupent la droite $x = L$ à partir du temps $T = L/U_0$. Comme h est un invariant de Riemann le long des caractéristiques et que $h(0, t) = h_0$ pour $t \geq 0$ on a $h(L, t) = h_0$ pour $t \geq T$. **3)** La région $t \geq 0$ délimitée par la droite caractéristique $x = U_0 t$ est uniforme avec $h(x, t) = h_0$. **4)** Pour $t \leq T$, la caractéristique passant par le point (L, t) du plan (x, t) coupe l'axe des x en $a = L - U_0 t$. La condition initiale est égale à $h_s(a) = h_0 + \gamma a$ en ce point. On a donc

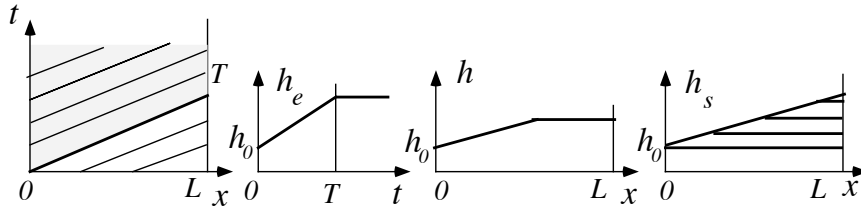


Figure 20: Remplissage de la rivière a) droites caractéristiques, b) $h_e(t)$, c) $h(x, t)$, d) $h_s(x)$ et $h(x, t)$.

$h_e(t) = h(x, t) = h_0 + \gamma L - \gamma U_0 t = h_0 + \gamma L - P_0 t$ pour $t \in [0, T]$. La hauteur $h_e(t)$ décroît linéairement à partir de la valeur $h_s(L)$ pour stagner à la valeur h_0 au-delà de $t = T$. **5)** Pour $x \leq U_0 t$, on a vu que $h(x, t) = h_0$. Pour $x \geq U_0 t$, la droite caractéristique passant par (x, t) coupe l'axe des x en $a = x - U_0 t$, ce qui entraîne $h(x, t) = h_0 + \gamma x - P_0 t$. La solution $h(x, t)$ est égale à $h_s(x - U_0 t)$ pour $x \geq U_0 t$ et égale à h_0 sinon. **6)** Les droites caractéristiques sont les mêmes que pour le cas $P = 0$, mais h n'est plus qu'une fonction de Riemann vérifiant $\left(\frac{dh}{dt}\right)_c = P_0$. Pour $t \leq T$, l'intégration de la fonction de Riemann le long de la droite caractéristique passant par (L, t) conduit à $h_e(t) = h(L, t) = h_0 + P_0 t$. Pour $t \geq T$, la droite caractéristique coupe l'axe des t en $(0, t - L/U_0)$ et l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h_e(t) = h(L, t) = h_0 + P_0 L/U_0 = h_0 + \gamma L$. Le profil $h_e(t)$ croît linéairement de h_0 à $h_0 + \gamma L = h_0 + P_0 T$ sur l'intervalle $[0, T]$ puis reste constant. **7)** Pour $x \geq U_0 t$, l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h(x, t) = h_0 + P_0 t$. Pour $x \leq U_0 t$, la droite caractéristique passant pas (x, t) coupe l'axe des t en $(0, t - x/U_0)$. L'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h(x, t) = h_0 + P_0 x/U_0 = h_0 + \gamma x$. La solution $h(x, t)$ part de h_0 , croît linéairement avec le temps jusqu'à atteindre la valeur du profil stationnaire $h_s(t)$. Le point où cette valeur est atteinte se déplace à la vitesse U_0 .

Corrigé 1.3 Modèle de crues rapides

Tracé qualitatif d'un hydrogramme

1) L'unité SI pour le coefficient de Strickler est en $\text{m}^{\frac{1}{3}} \text{s}^{-1}$. **2)** En remplaçant U par son expression en fonction de h , la loi de conservation de la masse $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U h) = 0$ devient $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta h^{\frac{5}{3}}) = 0$ avec $\beta = K \sqrt{I}$. **3)** Cette condition initiale correspond à une pluie dont l'intensité a été maximale au bas de la pente et nulle au sommet. **4)** Le modèle s'écrit sous la forme $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = \frac{5}{3} \beta h^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} U(h)$. Les caractéristiques

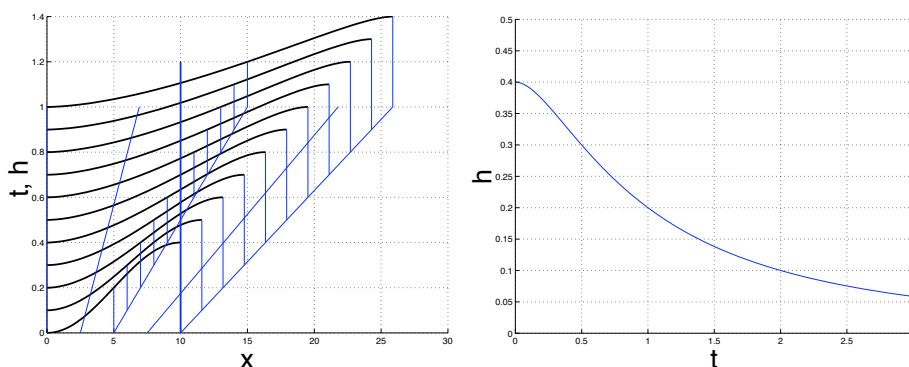


Figure 21: a) Évolution $h(x,t)$ de la condition initiale $h_0(x)$. b) Courbe $h(L,t)$ en fonction du temps.

sont les droites d'équations $x = a + c[h_0(a)]t = a + \frac{5}{3}\beta(h_*)^{\frac{2}{3}} [1 - \cos(ka)]^{\frac{2}{3}} t$ pour $a \in [0, L]$. **5)** Le profil initial est étiré vers la droite, d'autant plus rapidement que l'on s'écarte de la gauche $x = 0$. **6)** L'hydrogramme $h(L,t)$ décroît, vite au début et très lentement à la fin dans la mesure où des dernières caractéristiques ont des vitesses (inverse de la pente) très lentes.

Tracé quantitatif d'un hydrogramme

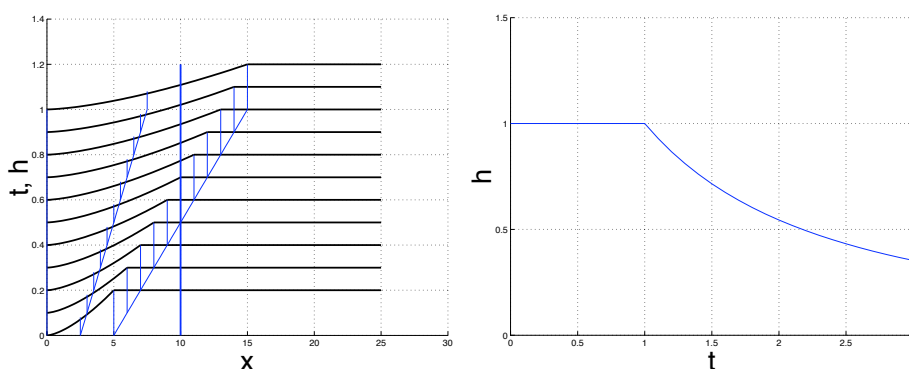


Figure 22: a) Évolution $h(x,t)$ de la condition initiale $h_0(x)$ b) Courbe $h(L,t)$ en fonction du temps.

7) Le modèle s'écrit $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = \frac{5}{3}\beta h^{\frac{2}{3}}$. Pour $a \in [0, l]$, on a $c[h_0(a)] = \gamma a$ avec $\gamma = \frac{5}{3}\beta h_*^{\frac{2}{3}}/l$. Pour $a \in [l, L]$, on a $c[h_0(a)] = c(h_*) = c_*$ avec $c_* = \gamma l$. Les équations des caractéristiques sont donc $x = (1 + \gamma t)a$ pour $a \leq l$ et $x = a + c_* t$ pour $a \geq l$. **8)** Les points (x,t) tels que $x \geq l + c_* t$ vérifient $h(x,t) = h_*$. La caractéristique qui passe par un point (x,t) situé

à gauche de cette région uniforme a pour équation $x = (1 + \gamma t)a$. Il est ici facile d'exprimer $a = x/(1 + \gamma t)$. Comme h est constant le long d'une caractéristique, on en déduit $h(x, t) = h_0(a) = h_0[x/(1 + \gamma t)]$ ce qui conduit à $h(x, t) = h_* (x/l)^{\frac{3}{2}} (1 + \gamma t)^{-\frac{3}{2}}$. **9)** Le profil initial en $a^{\frac{3}{2}}$ est étiré vers la droite, d'autant plus que l'on est loin de $a = 0$. La région des points où $h = h_*$ se déplace vers la droite à la vitesse constante $c_* = \gamma l$. **10)** On en déduit donc que $h(L, t) = h_*$ pour $t \in [0, t_*]$ avec $t_* = \frac{1}{\gamma}(L/l - 1)$ et que $h(x, t) = h_* (L/l)^{\frac{3}{2}} (1 + \gamma t)^{-\frac{3}{2}}$ pour $t \geq t_*$.

Ruissellement en présence de pluie

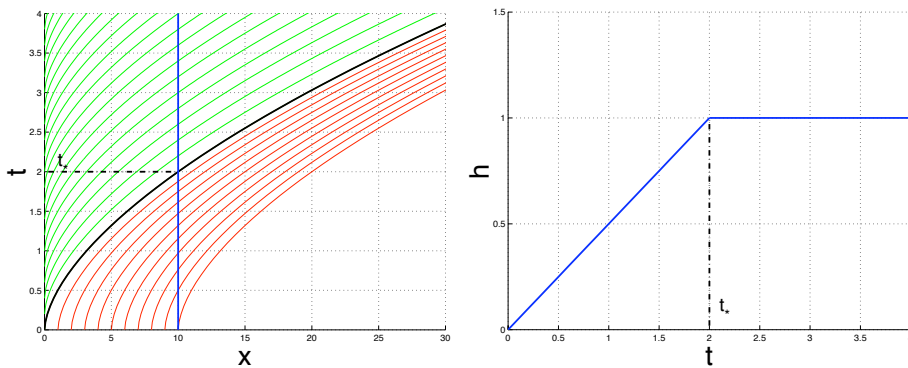


Figure **23**: a) Courbes caractéristiques. b) Courbe $h(L, t)$ en fonction du temps.

11) Les caractéristiques sont définies par le système d'équations $\dot{x} = \frac{5}{3}\beta h^{\frac{2}{3}}$ et $\dot{h} = P_0$ avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $h(0) = 0$. On en déduit $h(t) = P_0 t$ et $\dot{x} = \frac{5}{3}\beta P_0^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}$ que l'on intègre en $x(t) = a + \beta P_0^{\frac{2}{3}} t^{\frac{5}{3}}$. On vérifie qu'il s'agit bien de l'équation de la caractéristique passant par $(a, 0)$.

12) Les conditions initiales pertinentes sont ici $x(\tau) = 0$ et $h(\tau) = 0$. On en déduit que $h(t) = P_0(t - \tau)$ et que l'équation de la caractéristique passant par $(0, \tau)$ s'écrit $x(t) = \beta P_0^{\frac{2}{3}} (t - \tau)^{\frac{5}{3}}$.

13) Les caractéristiques sont des courbes déduites les unes des autres par des translations dans le plan (x, t) . Elles ne se coupent donc pas. **14)** L'équation de courbe caractéristique issue du point $(x, t) = (0, 0)$ est $x = \beta P_0^{\frac{2}{3}} t^{\frac{5}{3}}$. Elle coupe la droite $x = L$ en (L, t_*) avec $t_* = (L/\beta)^{\frac{3}{5}} / P_0^{\frac{2}{5}}$.

15) La valeur de $h(L, t)$ à l'équilibre est $h_* = P_0 t_* = (L P_0 / \beta)^{\frac{3}{5}}$. **16)** L'application numérique conduit à un temps t_* de l'ordre de 2 jours et une hauteur de ruissellement au bas de la pente de l'ordre de 2 mm. **17)** Les courbes caractéristiques qui atteignent le segment de droite $(x, t) = (L, t)$ avec $t \in [0, t_*]$, sont toute issue du segment de droite $(x, t) = (a, t)$ avec

$a \in [0, L]$. **18)** La valeur de $h(L, t)$ est donc égale à $h(L, t) = P_0 t$ pour $t \in [0, t_*]$ et à $h(L, t) = h_*$ pour $t \geq t_*$. **19)** On remarque que la condition sur t_0 s'écrit $t_0 \geq t_*$. Au-delà de $t = t_0$, les courbes caractéristiques qui coupe la droite $x = L$ n'ont soit pas vu de pluie, soit vu de la pluie pendant le temps $t_* - (t - t_0)$ si ce temps est positif. Comme la hauteur $h(t)$ est une fonction linéaire du temps de pluie, on en déduit que l'hydrogramme de crue est $h(L, t) = P_0 t$ pour $t \in [0, t_*]$, $h(L, t) = h_* = P_0 t_*$ pour $t \in [t_*, t_0]$, $h(L, t) = h_* - P_0(t - t_0) = P_0(t_* + t_0 - t)$ pour $t \in [t_0, t_0 + t_*]$ et $h(L, t) = 0$ pour $t \geq t_0 + t_*$. **20)** À $t = t_0$, on a $h(x, t_0) = h_*(x/l)^{3/2}(1 + \gamma t_0)^{-3/2}$. L'hydrogramme de crue est celui de la question 10) en prenant $t = t_0$ comme origine des temps et en remplaçant h_* par $h_*(1 + \gamma t_0)^{-3/2}$.

Corrigé 1.4 Modèles de l'équation de Burgers

1) Le bilan local est $\partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x (u^2) = \partial_t u + u \partial_x u = 0$. La relation de saut est $-w[u] + \frac{1}{2}[u^2] = 0$. **2)** La vitesse du choc est $w = \frac{1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$. C'est la moyenne des vitesses u_1 et u_2 . **3)** Le bilan local est $\partial_t (u^2) + \frac{2}{3} \partial_x (u^3) = 2u(\partial_t u + u \partial_x u) = 0$. La relation de saut est $-w[u^2] + \frac{2}{3}[u^3] = 0$. La vitesse du choc est $w = \frac{3}{2} \frac{u_1^3 - u_2^3}{u_1^2 - u_2^2} = \frac{2}{3} \frac{u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2}{u_1 + u_2}$. **4)** Les deux modèles correspondent au même bilan local mais différent par leurs relations de saut. La vitesse du choc n'est donc pas la même. **5)** Dans le cas continu, la formule de Leibnitz entraîne $\int_{x_1}^{x_2} \partial_t u \, dx + \frac{1}{2} [u^2]_{x_1}^{x_2} = 0$. Le bilan local est donc $\partial_t u + u \partial_x u = 0$. **6)** Dans le cas discontinu, la formule de Leibnitz entraîne $\int_{x_1^-(t)}^{x_2^-(t)} \partial_t u \, dx + \int_{x_1^+(t)}^{x_2^+(t)} \partial_t u \, dx - w[u] + \frac{1}{2} [u^2]_{x_1}^{x_2} = 0$. Comme $[u^2]_{x_1}^{x_2(t)} = [u^2]_{x_1^-(t)}^{x_2^-(t)} + [u^2]_{x_1^+(t)}^{x_2^+(t)} + [u^2]$, la relation de saut est $-w[u] + \frac{1}{2}[u^2] = 0$. Ce modèle est identique au premier modèle.

Corrigé 1.5 Ondes de crues non linéaires

1) La première équation traduit la conservation de la masse. La deuxième équation provient de la loi de conservation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe x dans laquelle l'accélération ainsi que le gradient de pression sont négligés. Seul l'équilibre entre la force de gravité et le frottement subsistent. **2)** En remplaçant $U = \sqrt{\frac{2gh \sin \alpha}{C_f}} = \kappa h^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation de continuité, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa \frac{\partial}{\partial x} (h^{\frac{2}{3}}) = 0$. **3)** La loi de conservation de la masse sous forme intégrale s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b h \, dx + (hU)|_b - (hU)|_a = 0$. On remplaçant U par son expression en fonction de h on obtient $\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b h \, dx + q(h)|_b - q(h)|_a = 0$ avec $q(h) = \kappa h^{\frac{2}{3}}$. **4)** On déduit de la formulation intégrale du modèle l'équation de bilan local $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = q'(h) = \frac{2}{3} \kappa h^{\frac{1}{2}}$ avec $q(h) = \kappa h^{\frac{2}{3}}$. La réciproque n'est pas vraie sauf si l'on ajoute la relation de

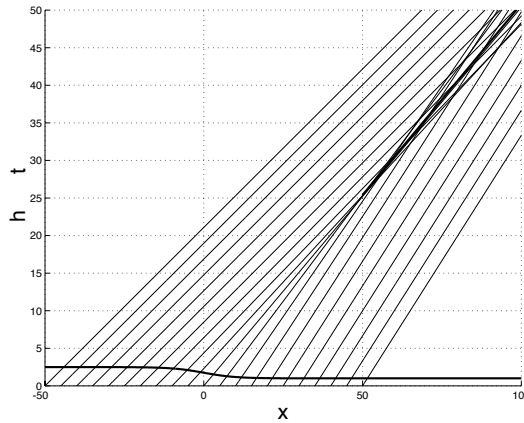


Figure 24: Droites caractéristiques et ressaut dans le plan (x, t) pour la conditions initiale $h(x, 0)$.

saut $-w[[h] + [q]] = 0$. **5)** Les caractéristiques sont des droites d'équation $x = X + c[h(X, 0)] t$. **6)** Comme $c(h)$ est croissante et $h(x, 0)$ décroissante, l'information "hautes eaux" rattrape l'information "basses eaux" : les caractéristiques se coupent et il se forme un ressaut hydraulique. **7)** L'invariant de Riemman est $r(h) = h$. L'extension spatiale du profil (initialement de l'ordre de $1/k$) diminue linéairement avec le temps jusqu'à la formation du ressaut. **8)** La vitesse de propagation du ressaut hydraulique est $w = [q]/[h]$. Longtemps après la formation du ressaut, la hauteur en amont du ressaut tend vers $h_0 + \Delta h$ et la hauteur en aval vers h_0 . La vitesse du ressaut tend donc vers $w = \kappa \left[(h_0 + \Delta h)^{3/2} - h_0^{3/2} \right] / \Delta h$. L'application numérique conduit à $w = \frac{(2.25)^{3/2} - 1}{1.25} = \frac{(9/4)^{3/2} - 1}{(5/4)} = \frac{(27/8 - 1)}{(5/4)} = 1.9$ m/s. **9)** Une crue d'environ 1 m sur un rivière de 1 m de profondeur coulant à 1 m/s ne semble pas dangeureuse si l'eau monte progressivement. Mais lorsqu'il se forme un ressaut d'environ 1 m se propageant à une vitesse d'environ 2 m/s, les effets dévastateurs peuvent être importants. L'approximation des ondes de crues permet de modéliser simplement ce phénomène.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BILLINGHAM and A. C. KING, Wave Motion, Cambridge U. P. 2000.
- [2] O. THUAL, Hydrodynamique de l'environnement, Éditions de l'École Polytechnique (2010).
- [3] O. THUAL, Des ondes et des fluides, Cépaduès-Éditions, 2005.
- [4] O. THUAL, Articles Pédagogiques Multimedia,
<http://thual.perso.enseeiht.fr/>